FINAL

Problème Méthode de Gauss Hermite

Ce problème a pour sujet d'étude la méthode de Gauss-Hermite conçue pour évaluer numériquement les intégrales du type

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-x^2}dx$$

où f est une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$.

On introduit sur l'espace vectoriel des fonctions polynômes à coefficients réels $\mathcal{P}$, le "crochet" $<,>: \mathcal{P}\times\mathcal{P}\to\mathbb{R}$ défini par

$$< p,q >= \int_{-\infty}^{\infty} p(x)q(x)e^{-x^2}dx$$

On admet le résultat suivant

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$$

La base canonique de $\mathcal{P}$ est notée $(f_0, f_1, \dots, f_k, \dots)$ où f_i est la fonction polynôme définie par $f_i(x) = x^i$. Enfin comme dans le cours on note $\mathcal{P}_k$ l'espace des fonctions polynômes de degré au plus k. Les questions **1**, **2**, **3** *et* **4** *sont indépendantes mis à part les résultats de* **1** *qui sont nécessaires pour la question* **2.a**. *Les résultats intermédiaires non démontrés pourront être utilisés tout au long du problème.*

Concernant le calcul des intégrales impropres du type $\int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx$ on rappelle que $\int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx$ existe si et seulement si $\int_{-\infty}^{a} g(x)dx$ et $\int_{a}^{\infty} g(x)dx$ existent et dans ce cas on a $\int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx = \int_{-\infty}^{a} g(x)dx + \int_{a}^{\infty} g(x)dx$.

1. Produit scalaire

- **a.** *Prouver que $<,>$ définit bien un produit scalaire sur $\mathcal{P}$.*
- **b.** *Montrer que $< f_0, f_0 >= \sqrt{\pi}$ et $< f_0, f_1 >= 0$*
- **c.** *Montrer à l'aide d'une intégration par partie que $< f_p, f_q >= \dfrac{p+q-1}{2} < f_{p-1}, f_{q-1} >$.*
- **d.** *Expliquer pourquoi les relations $(\star)$ $\begin{cases} < f_0, f_0 > &= \sqrt{\pi} \\ < f_0, f_1 > &= 0 \\ < f_p, f_q > &= \dfrac{p+q-1}{2} < f_{p-1}, f_{q-1} > \end{cases}$ permettent de calculer $\int_{-\infty}^{\infty} x^n e^{-x^2}dx$ quelque soit $n \in \mathbb{N}$.*
- **e.** *En déduire $\int_{-\infty}^{\infty} x^4 e^{-x^2}dx = \frac{3}{4}\sqrt{\pi}$.*

2. Intégration de Hermite à deux points.

- **a.** *On considère la base canonique (f_0, f_1, f_2) de $\mathcal{P}_2$. Utiliser le procédé de Gram-Schmidt pour obtenir une base de $\mathcal{P}_2$ orthogonale pour le produit scalaire $<,>$. On notera H_0, H_1, H_2 les polynômes ainsi obtenus.*
- **b.** *Calculer les racines x_0 et x_1 de H_2 et en déduire que le support d'intégration pour une intégrale de Gauss-Hermite à deux points est $\{-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\}$.*
- **c.** *Déterminer à partir des polynômes de Lagrange $l_0(x) = \dfrac{x-x_1}{x_0-x_1}$ et $l_1(x) = \dfrac{x-x_0}{x_1-x_0}$ les poids W_0, W_1 associés au support d'intégration.*

d. *Intégrer numériquement* $\int_{-\infty}^{\infty} x^4 e^{-x^2} dx$ *et proposer une majoration de l'erreur à partir de l'expression théorique de l'erreur en Gauss-Hermite.*

e. *Vérifier que cette majoration de l'erreur est cohérente avec le résultat obtenu à la question* **1.f**.

3. Recherche numérique des racines d'un polynôme de Hermite de degé 4

Dans cette question on donne $H_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12$ *et on s'intéresse à la détermination numérique de ses racines.*

a. *Montrer que* $H_4(x) = 0$ *possède une solution* $\alpha \in [1, 2]$.

b. *Si on souhaite approcher* α *par la méthode de la dichotomie à* 10^{-3} *près, combien de termes doit-on calculer ?*

c. *On décide d'approcher* α *par la méthode de Newton en prenant* $x_0 = 2$. *Écrire la suite des itérés de Newton.*

d. *On reproduit les résultats des valeurs numériques obtenues par trois étudiants ayant choisi des valeurs différentes pour* x_0. *Commentez.*

	Étudiant 1	*Étudiant 2*	*Étudiant 3*
x_0	2	1.2	1
x_1	$1,7625$	-3.995833333	$-0,375$
x_2	$1,667089370$	-3.097209923	0.545617816
x_3	$1,651108352$	-2.458945365	0.524858639
x_4	$1,651108352$	$-2,030257330$	0.524647647
x_5	$1,650680426$	$-1,777844695$	0.524647623
x_6	$1,650680124$	$-1,671323094$	0.524647623
x_7	$1,650680124$	$-1,651351506$	0.524647623
x_8	$1,650680124$	$-1,650680867$	0.524647623
x_9	$1,650680124$	$-1,650680124$	0.524647623
x_{10}	$1,650680124$	$-1,650680124$	0.524647623

e. *Pour* $x_0 = 0.00001$ *on obtient* $x_1 \approx 12500$, $x_2 \approx 9375$, $x_3 \approx 7031$. *Après avoir représenté* $y = H_4(x)$, *expliquer par des arguments géométriques le comportement de la suite des itérés de Newton lorsqu'on choisit* x_0 *proche de* 0.

4. Une expression explicite des polynômes de Gauss-Hermite.

On considère les fonctions

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2}) \text{ où } \frac{d^n}{dx^n} \text{représente la dérivée } n\text{-ème par rapport à } x$$

a. *Calculer* H_0 *et* H_1

b. *Montrer que* $\frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} = p(x)e^{-x^2}$ *avec* $p \in \mathcal{P}_n$. *En déduire que* H_n *est un polynôme de degré* n.

c. *Relation de récurrence : on rappelle la conséquence suivante de la formule de Leibnitz*

$$\frac{d^n}{dx^n}(xf(x)) = x\frac{d^n}{dx^n} f(x) + n\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} f(x) \ (\diamond)$$

i. *Montrer à l'aide de* $(\diamond)$ *que* $H_{n+1} = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x)$

ii. *Conclure en vous référant au cours que les polynômes* H_n *sont bien les polynômes de Hermite.*