FINAL MT40

Exercice 1 Quadrature de Gauss-Lobatto

Dans cet exercice on propose une variante de la méthode de Gauss-Legendre.

Le but est d'étudier une formule d'intégration de type «gaussienne» à $n+1$ points pour évaluer $\int_{-1}^{1} f(x)dx$ mais en imposant $x_0 = -1$ et $x_n = 1$. Cette méthode sera dite de Gauss-Lobatto.

Comme dans le cours on notera $I(f) = \int_{-1}^{1} f(x)dx$ l'intégrale exacte d'une fonction f continue sur $[-1, 1]$. Son intégration numérique par la méthode de Gauss-Lobatto sera notée $I^{\text{num}}(f)$, c'est-à-dire

$$I^{\text{num}}(f) = W_0 f(-1) + W_1 f(x_1) + \cdots + W_{n-1} f(x_{n-1}) + W_n f(1).$$

Pour $k \in \mathbb{N}$, on note L_k le polynôme de Legendre de degré k et L_k' son polynôme dérivé. On admet que pour $k \geqslant 1$, L_k' possède $k-1$ racines distinctes dans $]-1, 1[$.

On note $S_{n+1}(x) = (x^2 - 1)L_n'(x)$ et $x_1, \ldots, x_{n-1} \in]-1, 1[$ les $n-1$ racines de L_n'. Les racines de S_{n+1}, $\{-1, x_1, \ldots, x_{n-1}, 1\}$, sont les points de supports de la méthode.

Le produit scalaire sur l'espace des polynômes $\mathcal{P}$ (on notera $\mathcal{P}_k$ pour les polynômes de degré inférieur à k) est défini par

$$< p, q >= \int_{-1}^{1} p(x)q(x)dx.$$

1. Rappeler comment on calcule les poids W_i. Quel est l'ordre *a priori* de la méthode de Gauss-Lobatto ?
2. Montrer à l'aide d'une intégration par partie que $< S_{n+1}(x), x^l >= 0$ pour tout $l \leqslant n-2$. En déduire que pour tout $Q \in \mathcal{P}_{n-2}$ on a $S_{n+1} \perp Q$.
3. On veut prouver que la méthode de Gauss-Lobatto à $n+1$ points est d'ordre $2n-1$. Soit $P \in \mathcal{P}_{2n-1}$, on note Q et R le quotient et le reste de la division euclidienne de P par S_{n+1}, c'est-à-dire $P(x) = Q(x)S_{n+1}(x) + R(x)$.
   - **a.** Justifier les égalités suivantes
     - i. $I^{\text{num}}(P) = I^{\text{num}}(R)$,
     - ii. $I^{\text{num}}(R) = I(R)$,
     - iii. $I(R) = I(P)$.
   - **b.** Conclure que la méthode est d'ordre $2n-1$.
4. Application :
   - **a.** Montrer que la formule de quadrature de Gauss-Lobatto à 4 points de supports est d'ordre 5.
   - **b.** Calculer les points de supports pour la méthode de Gauss-Lobatto à 4 points.

Exercice 2 Résolution d'équation et accélération de la suite des itérés

Le but de l'exercice est de présenter une méthode d'accélération de la suite des itérés du point fixe.

On considère l'équation de Kepler [1]

$$x - e\sin(x) - M = 0, \text{ avec } 0 \leqslant M \leqslant 1 \text{ et } 0 \leqslant e < 1$$

1. Montrer que l'équation de Kepler possède une unique solution α sur $[0, \pi]$.

2. On souhaite approcher α par une méthode des itérés du point fixe. Pour cela on note $g(x) = e\sin(x) + M$.

- **a.** Écrire pour le schéma (x_n) des itérés du point fixe pour g.
- **b.** Montrer que (x_n) converge vers α.
- **c.** Écrire le développement de Taylor-Lagrange de g entre x_n et α à l'ordre 1.
- **d.** Déterminer λ tel que $\lim_{n\to+\infty} |\dfrac{x_{n+1}-\alpha}{x_n-\alpha}| = \lambda$. Montrer que $0 < \lambda < 1$ et en déduire que la convergence est linéaire.

3. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} |\dfrac{x_{n+1}-\alpha}{x_n-\alpha}| = \lambda$ implique $\lim_{n\to+\infty} |\dfrac{x_{n+1}-x_n}{x_n-x_{n-1}}| = \lambda$.

Indication : on pourra observer que $x_{k+1} - x_k = -(x_k - \alpha)(1 - \dfrac{x_{k+1}-\alpha}{x_k-\alpha})$.

On notera à partir de cette question $q_n = \dfrac{x_{n+1}-x_n}{x_n-x_{n-1}}$.

4. Accélérés de Aitken. On considère maintenant la suite (y_n), dite des accélérés de Aitken, constuite à partir de (x_n) et définie par

$$y_n = \frac{x_{n+1} - q_n x_n}{1 - q_n}$$

- **a.** Montrer que pour n assez grand la suite (y_n) est bien définie et que $\lim_{n\to+\infty} y_n = \alpha$.
- **b.** Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{y_n-\alpha}{x_n-\alpha} = 0$. En déduire que la suite (y_n) converge plus rapidement [2] vers α que la suite (x_n).

5. Interprétation géométrique.

- **a.** Déterminer $p_{1,n}$ le polynôme d'interpolation de degré 1 de g sur le support $\{x_n, x_{n-1}\}$ et montrer que $p_{1,n}(x) = x_{n+1} + q_n(x - x_n)$.
- **b.** En déduire que le terme y_n de la suite des accélérés de Aitken est le point fixe de $p_{1,n}$.
- **c.** Pour l'équation de Kepler avec $e = 0.9$ et $M = 0,2$ représenter (sommairement) sur un même graphique les courbes $y = g(x)$ et $y = x$. Après avoir choisi une valeur arbitraire pour x_{n-1} construire géométriquement sur le schéma (on laissera apparaitre les traits de construction) les valeurs x_n, x_{n+1} et y_n.

1. Cette équation est notament utilisée dans le calcul des orbites elliptiques, notament pour déterminer le passage des comètes... voir Final MT40 2009.
2. La suite des accélérés porte donc bien son nom...