FINAL

Les résultats intermédiaires non démontrés pourront être utilisés tout au long du devoir.

Exercice 1 Intégration de Gauss-Legendre

On considère l'intégrale suivante $I = \int_{-1}^{1} x^7 + 3x^3 dx$.

1. Évaluer cette intégrale par la méthode de Gauss-Legendre à trois points de support et calculer la valeur exacte de I.

2. À partir de l'expression de l'erreur donnée en cours, déterminer un majorant de celle-ci et vérifier que les valeurs trouvées à la question précédente sont bien cohérantes.

3. Combien de points de support faut-il prendre pour évaluer I de manière exacte par la méthode de Gauss-Legendre ? Justifier.

Exercice 2 Méthode de Euler

On considère le problème différentiel suivant où y est une fonction réelle deux fois dérivable sur un intervalle $[0, T]$ avec $T \geqslant 1$.

$$\left\{\begin{array}{l} y''(t) + \omega \sin(y(t)) = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{array}\right. \tag{1}$$

où ω est une constante réelle fixée.

1. En considérant le vecteur $Y = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$ où $u(t)$ et $v(t)$ sont des fonctions de t telles que $u = y$ et $v = u'$, mettre ce problème sous la forme d'un système du premier ordre

$$\left\{\begin{array}{c} Y(t)' = F(t, Y(t)) \\ Y(0) = Y_0. \end{array}\right.$$

où l'on précisera ce que sont F et Y_0.

2. Écrire le schéma d'Euler pour ce système.

3. Calculer Y_1, la valeur obtenue après une itération de ce schéma qui fournit une valeur approchée de $Y(h)$.

4. Pour des petites valeurs de y, on remplace l'équation du problème (1) par

$$z''(t) + \omega z(t) = 0 \tag{2}$$

dont la solution générale est $z = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$.

a. Déterminer les constantes A et B pour que la solution de l'équation (2) vérifient les conditions initiales du problème (1).

b. Évaluer $Z(h) = \begin{pmatrix} z(h) \\ z'(h) \end{pmatrix}$, et comparer à la valeur Y_1 obtenue pour approcher $Y(h)$.

Problème Méthode numérique

Dans ce problème on propose de mettre en oeuvre une méthode qui généralise à l'ordre 2 la méthode de Newton. Dans tout l'exercice f est une fonction de classe $\mathcal{C}^3$ sur un intervalle I possèdant une unique racine α dans cet intervalle.

1. *Parabole osculatrice.*

a. *Écrire le dévelopement de Taylor-Lagrange à l'ordre* 3 *de* f *en un point* a *quelconque de* I. *En déduire une expression du polynôme osculateur à* f *d'ordre* 2 *en* a *que l'on notera* $p_{2,a}$.

b. *Donner une représentation graphique de ce calcul en traçant dans le même repère les courbes* $y = \ln(x) + 1$ *et* $y = p_{2,a}(x)$ *(on prendra* $a = 1$*).*

c. *Expliquer en quoi la parabole* $y = p_{2,a}(x)$ *est la meilleure approximation à l'ordre* 2 *de* f *en* a *? Quel est l'équivalent à l'ordre* 1 *?*

2. *On considère maintenant le schéma numérique suivant.*

$$\begin{cases} x_0 \in I \\ x_{n+1} \text{ est une solution de l'équation } A(x - x_n)^2 + B(x - x_n) + C = 0 \end{cases} \tag{3}$$

avec $A = \dfrac{1}{2} f''(x_n)$, $B = f'(x_n)$ *et* $C = f(x_n)$. *On suppose à chaque itération que* $f(x_n) \neq 0$ *(sinon cela signifie que* $x_n = \alpha$ *et il est inutile de continuer).*

a. *En posant* $X = x - x_n$ *montrer que si* X *est solution de l'équation* $AX^2 + BX + C = 0$ *alors* $X \neq 0$. *En déduire que* X *est aussi solution de*

$$A + \frac{B}{X} + \frac{C}{X^2} = 0. \tag{4}$$

b. *Montrer que si* X *est solution de l'équation (4) alors* $X = \dfrac{2C}{-B \pm \delta}$ *où* δ *est le nombre (éventuellement complexe) tel que* $\delta^2 = B^2 - 4AC$ *(on pourra poser* $Y = \dfrac{1}{X}$*).*

c. *En déduire que* $x_{n+1} = x_n + \dfrac{2C}{-B + \epsilon\delta}$ *où* $\epsilon = \pm 1$ *(la valeur de* ϵ *sera choisie à chaque itération de sorte à minimiser la distance* $|x_{n+1} - x_n|$*).*

3. *Interprétation.*

a. *On souhaite utiliser ce schéma pour déterminer une approximation de* $\alpha = e^{-1}$ *solution de l'équation* $\ln(x) + 1 = 0$. *Calculer* x_1 *par le schéma (3) pour* $x_0 = 1$.

b. *Donner une interprétation géométrique du schéma numérique défini par (3).*

4. *Ordre de convergence. On admet que la méthode explicitée dans ce problème converge localement et on souhaite déterminer dans cette question l'ordre de convergence.*

a. *À partir du développement de Taylor-Lagrange de* f *à l'ordre 3 en* x_n *montrer l'égalité suivante*

$$0 = p_{2,x_n}(\alpha) + \frac{1}{6} f^{(3)}(\zeta)(\alpha - x_n)^3$$

où ζ *est un réel de l'intervalle défini par* α *et* x_n.

b. *Par construction que vaut* $p_{2,x_n}(x_{n+1})$ *? En déduire que*

$$p_{2,x_n}(x_{n+1}) - p_{2,x_n}(\alpha) = \frac{1}{6} f^{(3)}(\zeta)(\alpha - x_n)^3 \tag{5}$$

c. *Démontrer à partir de l'égalité (5) que*

$$x_{n+1} - \alpha = \frac{1}{6} \frac{f^{(3)}(\zeta)}{B + A(x_{n+1} + \alpha - 2x_n)} (\alpha - x_n)^3$$

d. *Exprimer en fonction de* $f'(\alpha)$ *et* $f^{(3)}(\zeta)$ *la limite* $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{6} \dfrac{f^{(3)}(\zeta)}{B + A(x_{n+1} + \alpha - 2x_n)}$. *En déduire que l'ordre de convergence de la méthode proposée est cubique.*