Exercice 1 *Intégration gaussienne*

On considère l'intégrale I définie par:

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{e^x}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

1.1 Démontrer que I existe et peut être calculée par une méthode gaussienne. Laquelle? Argumenter votre choix.

1.2 On choisit, pour cette question, d'utiliser une méthode d'intégration gaussienne à deux points.

a) Déterminer le support d'intégration $\{x_0, x_1\}$. Que représente ce support géométriquement?

b) *Valeurs approchées de I*

Fournir une valeur approchée I_a de I.

c) *Erreur de méthode*

Fournir une majoration de la valeur absolue de l'erreur de méthode commise dans l'évaluation de I.

- En déduire un intervalle contenant certainement la valeur de I.

1.3 On se propose désormais d'utiliser désormais une intégration gaussienne à $n+1$ points ($n \in \mathbb{N}$), pour le calcul de la même intégrale.

a) En utilisant les documents de cours, fournir l'expression de l'erreur de méthode E_{n+1} commise lors de cette intégration numérique.

b) Déterminer un majorant explicite u_{n+1} de $|E_{n+1}|$ en fonction de l'entier n.

c) Démontrer que la suite (u_n) est décroisssante et qu'elle converge vers 0.

N.B: Pour l'étude de la monotonie on aura intérêt à étudier le quotient u_{n+1}/u_n qui sera réutilisé dans la sous-question e) pour écrire un algorithme élégant et efficace.

d) En déduire que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un entier naturel n_0 tel que: $\forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geq n_0 \Rightarrow |E_{n+1}| < \varepsilon)$.

e) Fournir le plan d'un algorithme *determine_nbpoints*$(\varepsilon \to n_0)$ qui à partir du réel strictement positif ε permet à un utilisateur d'un logiciel d'intégration gaussienne de déterminer le nombre de points $n_0 + 1$ qu'il doit choisir pour être certain que la valeur absolue de l'erreur de méthode commise soit inférieure à ε.

Application numérique:

Déterminer $n_0 + 1$ pour $\varepsilon = 10^{-6}$.

.../...

Exercice 2 *Equations non linéaires*

Soit A un réel élément de $I =]1, +\infty[$. On considère l'équation (E) : $f(x) = 0$, où f est définie par $f(x) = x^2 - A$.

L'objet de l'exercice est de déterminer une valeur approchée de la solution positive de (E) par l'intermédiaire d'une équation "approchée".

2.1 *Existence et unicité de solution sur I*

- Etudier f sur I et montrer que (E) admet une solution unique, notée l, dans I.
- Fournir une allure de la courbe représentative (C) de f dans un repère du plan.

2.2 *Equation approchée de (E)*

Soit α, β deux éléments donnés, distincts ou non, de I.

a) Déterminer le polynôme p_1 qui interpole f sur le support $\{\alpha, \beta\}$.

b) On définit l'équation approchée $(E_{\alpha\beta})$ de (E), relative au support $\{\alpha, \beta\}$, par:

$$(E_{\alpha\beta}) : \quad p_1(x) = 0.$$

b1) Montrer que si $\alpha \neq \beta$, $(E_{\alpha\beta})$ s'écrit:

$$(E_{\alpha\beta}) : \quad \alpha^2 - A + (\beta + \alpha)(x - \alpha) = 0.$$

Résoudre l'équation $(E_{\alpha\beta})$.

b2) Montrer que si $\alpha = \beta$, $(E_{\alpha\beta})$ s'écrit:

$$(E_{\alpha\beta}) : \quad \alpha^2 - A + 2\alpha(x - \alpha) = 0.$$

Nb: On rappelle que dans ce cas $f[\alpha, \alpha] = f'(\alpha)$.

Résoudre l'équation $(E_{\alpha\beta})$.

2.3 *Deux cas particuliers importants*

a) Soit x_0 et x_1 deux éléments distincts de I.

- Soit $n = 1$; on pose $\alpha = x_n$ et $\beta = x_{n-1}$. On note l_a la solution de $(E_{\alpha\beta})$ trouvée en 2.2b1).
  - Fournir l'expression de l_a en fonction de x_n et x_{n-1}.
  - Que représente géométriquement l_a par rapport à la corde $(M_n M_{n-1})$, où M_n et M_{n-1}désignent les points de la courbe (C) d'abscisses respectives x_n et x_{n-1}?
  - On définit alors x_{n+1} par: $x_{n+1} = l_a$.
- Soit alors $n = 2$; on itère le processus décrit ci-dessus, puis on fait de même pour tout n.
  Montrer qu'on définit ainsi la suite des itérés de Lagrange relatifs à l'équation (E).

b) Soit x_0 un élément de I.

- Soit $n = 0$; on pose $\alpha = x_n$ et $\beta = x_n$. On note l_a la solution de $(E_{\alpha\beta})$ trouvée en 2.2b2.).
  - Fournir l'expression de l_a en fonction de x_n.
  - Que représente géométriquement l_a par rapport à la tangente en M_n à la courbe représentative (C) de f, où M_n désigne le point de (C) d'abscisse x_n? En déduire que l_a est dans I et vérifie $l_a \geq l$.
  - On définit alors x_{n+1} par: $x_{n+1} = l_a$.

- Soit alors $n = 1$; on itère le processus décrit ci-dessus et de même, pour tout n.
  Montrer qu'on définit ainsi la suite des itérés de Newton relatifs à l'équation (E) qui sont aussi les itérés de la méthode de Babylone pour déterminer les racines carrées.

c) En déduire que les itérations de Lagrange et de Newton sont des cas particuliers d'un même processus.

2.4 *Vitesse de convergence*

On considère désormais la suite (x_n), initialisée par x_0 [respectivement $\{x_0, x_1\}$], définie pour n de $\mathbf{N}$ [resp^t $\mathbf{N}^*$] par : $x_{n+1} = l_a$ où l_a est solution de $(E_{\alpha\beta}) : p_1(x) = O$, sachant que p_1 interpole f sur le support $\{\alpha, \beta\}$ égal à $\{x_n, x_n\}$ [resp^t $\{x_n, x_{n-1}\}$].

On pose pour tout n de $\mathbf{N}$: $e_n = l - x_n$.

a) En utilisant l'expression de l'erreur de méthode en interpolation polynômiale du chapitre 1 de mt40, montrer que:

$$e_{n+1} = -\frac{f\left[\alpha, \beta, l\right]}{f\left[\alpha, \beta\right]}(l-\alpha)(l-\beta)$$

b) En déduire, sachant que ζ_n désigne un réel de I:

- qu'en méthode de Newton (vu $\{\alpha, \beta\} = \{x_n, x_n\}$) on a:

$$e_{n+1} = -\frac{1}{f'\left(\zeta_n\right)}\left(e_n\right)^2 = -\frac{1}{2\zeta_n}\left(e_n\right)^2.$$

- qu'en méthode de Lagrange (vu $\{\alpha, \beta\} = \{x_n, x_{n-1}\}$) on a:

$$e_{n+1} = -\frac{1}{f'\left(\zeta_n\right)}e_n e_{n-1} = -\frac{1}{2\zeta_n}e_n e_{n-1}$$

c) *Performances comparées des méthodes de Newton et Lagrange*

On suppose avoir établi que la suite (x_n) converge vers l.

- Retrouver que la convergence en méthode de Newton est quadratique.
- Montrer qu'en méthode de Lagrange la convergence est d'ordre $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, le nombre d'or.
  Indication: on cherchera des réels p et k tels que :$\frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^p} = c_n \left(\frac{|e_n|}{|e_{n-1}|^p}\right)^k$.