Nb: On rédigera les exercices sur des feuilles séparées. On pourra admettre tout résultat intermédiaire afin de poursuivre la résolution d'un exercice.

Exercice 1

L'objet de l'exercice est d'utiliser l'interpolation polynômiale à des fins de dérivation approchée. L'étude est menée ici dans un cas très particulier, dont plusieurs aspects peuvent être généralisés. Chebyschev a obtenu dans ce domaine des résultats remarquables !

Soit f une fonction polynôme quelconque de degré 3, définie sur un intervalle $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ avec $a<b$. On considère un réel t quelconque de $]a,b[$.

1.1 *Interpolation sur le support* $\{a,b,t\}$

(a) *Détermination du polynôme interpolateur*

- Déterminer la fonction polynôme p_2 qui interpole f sur $\{a,b,t\}$ sans expliciter le calcul des différences divisées intervenantes.
- *Exemple*
  On donne f par $f(x)=x^3+x^2+x+1$, $a=-1$, $b=1$ et $t=0$. Trouver p_2.
  Nb: Ces données numériques seront réutilisées seulement dans la question 1.1(e) pour illustrer l'étude générale.

(b) On considère la fonction erreur d'interpolation e, définie sur $[a,b]$ par :

$$e(x)=f(x)-p_2(x).$$

- Montrer que e est une fonction polynôme de degré 3, dont le coefficient dominant est celui de f. Il sera noté désormais α.
- Montrer que e s'annule pour $x=a$, $x=b$ et $x=t$.
- En déduire l'écriture de $e(x)$, pour tout x de $[a,b]$.

(c) Montrer que l'expression de l'erreur d'interpolation permet d'écrire :

$$\forall x\in[a,b] \qquad f'(x)=p_2'(x)+e'(x).$$

(d) Déduire de l'expresssion de $e(x)$ obtenue en fin de question 1.1(b) que :

$$e'(t)=\alpha\,(t-a)\,(t-b)\,.$$

(e) *Exemple*

Déterminer $f'(x)$, $p_2'(x), e'(x)$ et $e'(t)$ pour les données numériques fournies dans l'exemple du 1.1(a).

1.2 *Utilisation pour la dérivation approchée*

Soit x un réel quelconque de $[a,b]$.

(a) Quelle valeur approchée de $f'(x)$ peut-on choisir ? Argumenter brièvement. Où rencontre-t-on la même idée sous mt40 ?.

(b) On adopte la démarche retenue en (a) et on s'intéresse à $E(t)$, valeur absolue de l'erreur de méthode commise en remplaçant $f'(t)$ par $p_2'(t)$.

- Comment choisir t dans $]a,b[$ pour que $E(t)$ soit maximale ?
- Interpréter le résultat obtenu.

.../...

Exercice 2

L'objet de l'exercice est l'étude de quelques aspects de l'interpolation polynômiale conduisant à la production de logiciels de décomposition automatique en éléments simples.

Soit n de $\mathbb{N}$ donné. On considère, pour tout l'exercice, une famille $\{x_0, ..., x_n\}$ de $n+1$ points distincts de $\mathbb{R}$.

2.1 Soit N, comme numérateur..., une fonction de P_n, espace des fonctions polynômes de degré au plus n. On donne N par:

$$\forall i \in \{0, ..., n\} \qquad N(x_i) = y_i.$$

Montrer, sans calculs, que $N = p_n$, où p_n désigne le polynôme interpolateur de N sur le support $\{x_0, ..., x_n\}$.

2.2 *Outils techniques*

On considère la famille $(l_i)_{0 \leq i \leq n}$ des polynômes de Lagrange associés au support $\{x_0, ..., x_n\}$; on définit D par:

$$D(x) = \prod_{j=0}^{n} (x - x_j).$$

(a) Pour tout i de $\{0, ..., n\}$, montrer que:

$$D'(x_i) = \prod_{\substack{j = 0 \\ j \neq i}}^{n} (x_i - x_j).$$

Nb: On utilisera le nombre dérivé d'un produit de $n+1$ fonctions, généralisation du résultat suivant:

$$(u_1 u_2 u_3)'(x) = u_1'(x) u_2(x) u_3(x) + u_1(x) u_2'(x) u_3(x) + u_1(x) u_2(x) u_3'(x).$$

(b) En déduire :

$$\forall i \in \{0, ..., n\} \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{x_0, ..., x_n\} \qquad l_i(x) = \frac{D(x)}{(x - x_i) D'(x_i)}$$

2.3 On note p_n le polynôme, étudié sous 2.1, qui interpole N en $\{x_0, ..., x_n\}$.

Montrer qu'on peut écrire

$$\forall i \in \{0, ..., n\} \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{x_0, ..., x_n\} \qquad \frac{p_n(x)}{D(x)} = \sum_{i=0}^{n} \frac{\alpha_i}{(x - x_i)}$$

On fournira , pour tout i de $\{0, ..., n\}$, α_i en fonction de $y_i = N(x_i)$ et de $D'(x_i)$.

2.4 *Intégration des résultats antérieurs*

On considère une fonction fraction rationnelle, notée R, définie par :

$$\forall x \in \mathbf{R} - \{x_0, ..., x_n\} \quad R(x) = \frac{N(x)}{\prod_{j=0}^{n} (x - x_j)} \quad \text{avec } N \in P_n.$$

(a) Utiliser la théorie antérieure pour fournir la décomposition de $R(x)$ en éléments simples; on décrira, brièvement mais soigneusement, le plan de la méthode, en particulier les calculs intermédiaires nécessaires.

(b) *Application*: Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle R donnée par :

$$R(x) = \frac{x+1}{(x-1)(x-2)(x-3)}.$$

(c) Proposer brièvement une critique de la méthode suggérée. Quels types de fractions rationnelles, permet-elle et ne permet-elle pas de décomposer en éléments simples ? Idées de généralisation?