Nb: On rédigera les exercices sur des feuilles séparées. On pourra admettre tout résultat intermédiaire afin de poursuivre la résolution d'un exercice.

Exercice 1 *Interpolation polynômiale*

L'objet de l'exercice est d'établir un résultat destiné à la majoration de l'erreur de méthode commise lors d'une interpolation polynômiale sur un intervalle fermé borné $I = [a, b]$ de $\mathbb{R}$..

On considère une fonction f continue sur I et $\{x_0, ..., x_{n+1}\}$ $n+2$ points distincts de $[a, b]$.

1.1 *Résultats techniques*

a) On note $\|f\| = \sup\limits_{x \in [a,b]} (|f(x)|)$. Justifier l'existence de $\|f\|$.

b) On considère la fonction u définie par :

$$u(x) = \prod_{j=0}^{n+1} (x - x_j).$$

Montrer que u est dérivable sur $\mathbb{R}$.

- Pour tout i de $\{0, ..., n+1\}$ on pose :

$$u(x) = (x - x_i)\, v(x) \quad \text{avec } v(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n+1} (x - x_j).$$

  En considérant u comme un produit, donner $u'(x)$ en fonction de $v(x)$ et $v'(x)$.
- En déduire que :

$$u'(x_i) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n+1} (x_i - x_j).$$

c) En déduire que pour toute fonction g définie sur $[a, b]$, on peut écrire :

$$g\,[x_0, ..., x_{n+1}] = \sum_{i=0}^{n+1} \frac{g(x_i)}{u'(x_i)}.$$

Nb : On écrira le polynôme d'interpolation de g sur $\{x_0, ..., x_{n+1}\}$ dans les bases de Lagrange et Newton associées et on identifiera les deux expressions de son coefficient dominant.

1.2 *Majoration globale d'une erreur d'interpolation sur* $[a,b]$

Soit $\mathcal{P}_n$ l'espace vectoriel des fonctions polynômes de degré au plus n.

a) Soit p une fonction quelconque de $\mathcal{P}_n$.

- Montrer que le polynôme d'interpolation de p sur le support $\{x_0,...,x_{n+1}\}$ est p lui-même.
- En déduire que :

$$p\left[x_0,...,x_{n+1}\right]=0 \quad \text{et que} \quad (f-p)\left[x_0,...,x_{n+1}\right]=f\left[x_0,...,x_{n+1}\right].$$

b) En considérant la fonction $g=f-p$, montrer que :

$$\left|f\left[x_0,...,x_{n+1}\right]\right|\leq\|f-p\|\,.M\left(x_0,...,x_{n+1}\right),$$

où $M\left(x_0,...,x_{n+1}\right)$ est le réel strictement positif défini par :

$$M\left(x_0,...,x_{n+1}\right)=\sum_{i=0}^{n+1}\frac{1}{\left|u'(x_i)\right|}.$$

c) On admet pour la suite qu'il existe une fonction p^* de $\mathcal{P}_n$ telle que :

$$\|f-p^*\|=\min_{p\in\mathcal{P}_n}\left(\|f-p\|\right).$$

Ce minimum sera alors appelé distance de f à $\mathcal{P}_n$; on notera : $\|f-p^*\|=dist\left(f,\mathcal{P}_n\right)$.

Déduire de ce qui précède que :

$$\frac{\left|f\left[x_0,...,x_{n+1}\right]\right|}{M\left(x_0,...,x_{n+1}\right)}\leq dist\left(f,\mathcal{P}_n\right).$$

d) On note p_n le polynôme d'interpolation de f sur le support $\{x_0,...,x_n\}$ et t un réel quelconque de $[a,b]$ non élément de $\{x_0,...,x_n\}$.

d1) En utilisant l'étude de l'erreur locale en t en interpolation polynômiale, montrer qu'on a :

$$f(t)-p_n(t)=\left(\prod_{j=0}^{n}(t-x_j)\right).f\left[x_0,...,x_n,t\right].$$

d2) En posant $t=x_{n+1}$ et en utilisant 1.2c) montrer que :

$$\left|f(t)-p_n(t)\right|\leq\left(\prod_{j=0}^{n}\left|(x_{n+1}-x_j)\right|\right).M\left(x_0,...,x_{n+1}\right).dist\left(f,\mathcal{P}_n\right).$$

d3) En déduire que :

$$dist\left(f,\mathcal{P}_n\right)\leq\|f-p_n\|\leq\left(1+\|\Lambda_n\|\right).dist\left(f,\mathcal{P}_n\right),$$

où $\Lambda_n\left(t\right)$ est donné par :

$$\Lambda_n\left(t\right)=\sum_{i=0}^{n}\left|l_i\left(t\right)\right|,$$

sachant que $\left(l_i\right)_{0\leq i\leq n}$ désigne la famille des Lagrange associés à $\{x_0,...,x_n\}$.

d4) Montrer que pour obtenir une interpolation polynômiale optimale, on tentera de choisir un support d'interpolation $\{x_0, ..., x_n\}$ qui donne une valeur minimale à $\|\Lambda_n\|$.

Nb : Chebyshev a établi que Λ_n est optimale pour des points de support $\{x_0, ..., x_n\}$ très particuliers, qui portent aujourd'hui son nom !

Exercice 2 *Intégration numérique*

2.1 *Cadre de l'étude*

Dans un laboratoire industriel, un ingénieur étudie un signal u fonction du temps; pour des raisons théoriques, il sait que ce signal est sinusoïdal, c'est-à-dire qu'il existe des réels u_m, ω et φ (inconnus !) tels que :

$$u(t) = u_m \sin(\omega t + \varphi).$$

Le signal u est connu seulement par des mesures dont l'acquisition sur un PC se fait au rythme de 12000 par seconde, chacune d'elles nécessitant 6 octets. On suppose que le signal est "propre" grâce à un prétraitement; il n'existe donc plus de mesures aberrantes...

Le laboratoire dispose de deux outils informatiques en particulier :

- une fonction *int.simpson* (u, a, b) capable de calculer par méthode de Simpson une valeur approchée de l'intégrale $I = \int_a^b u(t)dt$, pour tous a et b donnés.
- une fonction *dates.changements* (u, a, b) capable de détecter le nombre des changements de signes du signal u entre les dates a et b.

Problème posé : L'ingénieur responsable de l'étude doit déterminer une valeur approchée précise de la période T du signal; il est certain, par expérience, que la valeur de T est comprise entre 1 et $1,5$ seconde.

On note t_0 la date du début des mesures; $u(t_0)$ est évidemment quelconque et ne sera nulle par exemple qu'avec une très faible probabilité...

2.2 *Première solution envisagée*

L'ingénieur se propose d'acquérir k cycles consécutifs du signal u et de fournir une valeur moyenne de la longueur des cycles étudiés.

a) Fournir le plan de la méthode mise en oeuvre pour fournir une valeur approchée de la période T.

b) Si par exemple $k = 10$, combien d'espace mémoire (en *kilo octets*) aura été nécessaire environ pour l'obtention du résultat ?

2.3 *Variante utilisant le calcul intégral*

Dès le début des mesures à l'instant t_0, l'ingénieur responsable met en route le calcul de l'intégrale du signal et cherche à détecter la première date b telle que $b - t_0$ corresponde à une période. On utilisera des représentations graphiques pour illustrer la situation.

a) Si l'intégrale $I(b) = \int_{t_0}^b u(t)dt$ est nulle, $b - t_0$ représente-t-elle nécessairement une valeur approchée de T ?

b) Quelle condition complémentaire faut-il imposer pour obtenir assurément une valeur de T ?

c) Fournir le plan de la méthode mise en oeuvre pour obtenir une valeur approchée de T, dans cette seconde version.

d) Quel est l'intérêt de cette solution par rapport à la première envisagée ?

Nb : Cette variante, reconnue comme la meilleure solution au problème posé; est utilisée depuis chez un grand constructeur voisin de l'Utbm après une étude menée dans le cadre d'une TX par deux anciens étudiants de mt40 !