Utbm mt40 **Examen médian** **Automne 2009**

Nb: On rédigera les exercices sur des feuilles séparées. On pourra admettre tout résultat intermédiaire afin de poursuivre la résolution d'un exercice.

Exercice 1 *Interpolation polynômiale et schéma de Neuville-Aitken*

Dans cet exercice, on présente une autre méthode que celle du cours pour calculer le polynôme d'interpolation d'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ pour le support $\{x_0, ..., x_n\}$.

1.1 *Etude d'un cas particulier*

Soit $g : [1, 4] \to \mathbb{R}$ une fonction que l'on souhaite interpoler. On fournit le tableau de valeurs suivantes :

x	1	2	3	4
$g(x)$	-1	2	0	3

a) Déterminer le polynôme d'interpolation p de g pour le support $\{1, 2, 3, 4\}$.

b) Déterminer les polynômes d'interpolation p_{234} et p_{134} qui interpolent g pour les supports respectifs $\{2, 3, 4\}$ et $\{1, 3, 4\}$.

c) Considérer $q(x)$ défini par :

$$q(x) = \frac{(2-x)p_{134}(x) + (x-1)\,p_{234}(x)}{(2-1)} \qquad (R)\,.$$

et montrer que $p = q$.

Nb : Il n'est pas nécessaire de fournir une écriture développée de $q(x)$ pour conclure; c'est même déconseillé! On priviligiera la définition de p_{234}, p_{134} et p comme polynômes interpolateurs.

d) En s'inspirant de la relation (R), comment p_{234} peut-il être calculé à partir de p_{23} et p_{34} qui désignent les polynômes d'interpolation de g pour les supports respectifs $\{2, 3\}$ et $\{3, 4\}$?

e) Représenter l'organisation du calcul de q par une arborescence. En déduire le nombre de polynômes intermédiaires p_{ij}, p_{ijk} qu'il faut déterminer pour obtenir q, donc p.

1.2 *Généralisation*

On considère une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ et le support $\{x_0, ..., x_n\}$ constitué de $n + 1$ points distincts.

a) Soit l et k deux éléments distincts de $\{0, 1, ..., n\}$.

On note p_k et p_l les polynômes qui interpolent f sur les supports respectifs $\{x_0, ..., x_n\} - \{x_k\}$ et $\{x_0, ..., x_n\} - \{x_l\}$. Montrer que p défini par :

$$p(x) = \frac{(x_k - x)\,p_k(x) + (x - x_l)\,p_l(x)}{(x_k - x_l)}$$

est le polynôme d'interpolation de f pour le support $\{x_0, ..., x_n\}$.

.../...

b) On considère l'algorithme $Neuville - Aitken\,(n, x, y \to p)$ décrit ci-dessous.

Entrée:

- n: entier naturel
- $x = (x_0, ..., x_n)$: vecteur réel des points de support d'interpolation
- $y = (y_0, ..., y_n)$: vecteur des valeurs prises par f. Autrement dit : $\forall i \in \{0, ..., n\} \quad y_i = f(x_i)$.

Sortie :

- p : fonction polynôme.

Variable locale

- $T(i, j)$: matrice réelle de taille $n \times n$

Corps d'algorithme

Début

faire pour $i = 0$ *jusqu'à* n

$T(i, 0) \leftarrow y_i$

fin de faire en i

faire pour $j = 1$ *jusqu'à* n

faire pour $i = 0$ *jusqu'à* $n - j$

$$T(i, j) \leftarrow \frac{(x_{i+j} - x)\,T(i, j-1) + (x - x_i)\,T(i+1, j-1)}{(x_{i+j} - x_i)}.$$

fin de faire en i

fin de faire en j

$p \leftarrow T(0, n)$

Fin de $Neuville - Aitken\,(\,)$

b1) Montrer par récurrence sur j que le polynôme $T(i, j)$ interpole f pour le support $\{x_i, x_{i+1}, ..., x_{i+j}\}$.

b2) Que représente le polynôme p produit par l'algorithme ?

1.3 *Eléments d'étude de complexité*

On note α le temps d'accès mémoire en lecture ou écriture, β le temps d'opération sur des réels ($+$, $-$, $\times$, $/$) et γ le temps d'une opération sur des polynômes ($.$,$\times$, $+$). Proposer quelques éléments d'étude du temps d'exécution de l'algorithme de $Neuville - Aitken\,(\,)$; on comparera en particulier les tailles de α, β et γ, leur dépendance ou non, de n.

Exercice 2 *Intégration numérique par méthode de Simpson*

Dans cet exercice, on se propose de réfléchir à la taille du pas h d'intégration sous méthode de Simpson, qui garantira une erreur de méthode inférieure à un seuil donné pour une fonction simple. Ordinairement, ce calcul d'intégrale ne requiert pas l'appel aux méthodes numériques approchées...

On considère deux réels a et b vérifiant $a < b$ et on note ε un élément de $\mathbb{R}^{+*}$, dont la valeur numérique sera donnée par $\varepsilon = 10^{-6}$ pour tout l'exercice. On choisit de mettre en oeuvre une méthode de Simpson pour déterminer une valeur approchée des intégrales considérées et on note h le pas d'intégration choisi.

.../...

2.1 *Calcul d'une valeur approchée de* $I = \int_a^b e^x dx$

a) Montrer que I existe. Le recours à la méthode de Simpson pour évaluer I est-il licite ?

b) Rappeler l'expression de l'erreur de méthode E_S^N commise, sachant qu'on a : $h = (b-a)/N$.

c) Montrer que :

$$\left|E_S^N\right| \leq \frac{(b-a)}{180}\left(\frac{h}{2}\right)^4 e^b.$$

d) Montrer que pour avoir $\left|E_S^N\right| < \varepsilon$, il suffit que : $\frac{(b-a)}{180}\left(\frac{h}{2}\right)^4 e^b < \varepsilon$.

L'inégalité proposée est-elle nécessaire ?

e) *Pas maximal autorisé*

- Déduire de d) le pas maximal $h_{\max}$ garant de la précision souhaitée.
- Montrer qu'on peut alors choisir :

$$N = Ent\left[\frac{(b-a)}{h_{\max}}\right] + 1, \text{ où } Ent \text{ désigne la fonction partie entière.}$$

- Pour fournir une valeur approchée convenable de I, donner en fonction de N, le nombre α de points où la fonction à intégrer devra être évaluée.

2.2 *Etude de l'effet de b sur la taille du pas maximal d'intégration*

a) On se propose de fournir une valeur approchée de $I_1 = \int_{-2}^{3} e^x dx$.

- Déterminer numériquement le pas maximal autorisé h_1 qui garantit que : $\left|E_S^N\right| < \varepsilon$.
- En déduire l'entier N_1 associé et le nombre α_1 de points de l'intervalle où la fonction exponentielle devra être évaluée.

b) *Variante pour le calcul de* I_1

On se propose de calculer I_1 sous la forme suivante :

$$I_1 = \int_{-2}^{-1} e^x dx + \int_{-1}^{0} e^x dx + \int_{0}^{1} e^x dx + \int_{1}^{2} e^x dx + \int_{2}^{3} e^x dx.$$

b1) Déterminer le pas maximal h_{21} autorisé pour que la méthode de Simpson fournisse une valeur approchée de $I_{21} = \int_{-2}^{-1} e^x dx$ avec une erreur de méthode certainement inférieure à $\varepsilon/5$.

En déduire le nombre α_{21} des points de l'intervalle $[-2, -1]$ où la fonction exponentielle devra être évaluée.

b2) *Généralisation*

- Déterminer le pas maximal h_{22} [respectivement h_{23}, h_{24}, h_{25}] autorisé pour que la méthode de Simpson fournisse une valeur approchée de $I_{22} = \int_{-1}^{0} e^x dx$ [respectivement $\int_0^1 e^x dx$, $\int_1^2 e^x dx$, $\int_2^3 e^x dx$] avec une erreur de méthode certainement inférieure à $\varepsilon/5$.
- En déduire le nombres α_{22} [respectivement α_{23}, α_{24}, α_{25}] des points des intervalles adéquats où la fonction exponentielle devra être évaluée.

b3) Déterminer $\alpha_2 = \sum_{i=1}^{5} \alpha_{2i}$ et le comparer à α_1. Analyser brièvement le résultat obtenu.

b4) On parle lors de l'utilisation de ce type de méthode, d'un choix de pas adaptatif. Justifier ce terme.