Utbm mt40 **Médian Automne 2011** **Durée : 2 heures**

Nb : Les deux exercices seront rédigés sur des feuilles séparées, svp.

Exercice 1 *Etude d'erreur globale en interpolation*

Nb : On change de feuille, svp.

Soit f la fonction définie sur $[-1, 1]$ par $f(x) = x^3 + 2x + 1$.

1.1 *Interpolation sur le support* $\{-1, 0, 1\}$

a) Déterminer la fonction polynôme p_{21} qui interpole f sur $\{-1, 0, 1\}$.

b) En déduire l'écriture polynômiale explicite sur $[-1, 1]$ de la fonction e_1 définie par $e_1 = |f - p_{21}|$.

c) Donner le tableau des variations de la fonction e_1 sur $[-1, 1]$.

1.2 *Interpolation sur le support* $\left\{-\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$, *appelés points de Tchebychev*

a) Déterminer la fonction polynôme p_{22} qui interpole f sur $\left\{-\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$.

b) En déduire l'écriture polynômiale explicite sur $[-1, 1]$ de la fonction e_2 définie par $e_2 = |f - p_{22}|$.

c) Donner le tableau des variations de la fonction e_2 sur $[-1, 1]$.

1.3 *Comparaison des interpolations*

a) Représenter graphiquement dans le même repère du plan, les fonctions e_1 et e_2.

b) Interpréter les résultats obtenus.

Exercice 2 *Variante d'algorithme d'évaluation d'une fonction polynôme*

Nb : On change de feuille, svp.

Soit n de $\mathbf{N}^*$, x_0 de $\mathbb{R}$ et h de $\mathbb{R}^{+*}$donnés. On note $\mathcal{P}_2$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des fonctions polynômes nulle ou de degré au plus deux et $(f_k)_{0 \leq k \leq 2}$ sa base canonique.

2.1 Soit Δ l'application de $\mathcal{P}_2$ dans $\mathcal{P}_2$ définie pour tout p élément de $\mathcal{P}_2$ par $\Delta(p) = q$ avec:

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad q(x) = p(x + h) - p(x).$$

De plus, pour tout i de $\mathbf{N}$, on définit Δ^i par :

$$\Delta^0 = id \quad \text{et} \quad \Delta^i = \Delta \circ \Delta^{i-1} \text{ si } i\rangle 0.$$

a) Déterminer l'image par Δ de chacun des vecteurs de la base $(f_k)_{0 \leq k \leq 2}$.

b) Montrer que Δ vérifie, pour toutes fonctions polynômes $(p, q) \in (\mathcal{P}_2)^2$ et pour tout réel λ:

$$\Delta(p + q) = \Delta(p) + \Delta(q) \text{ et } \Delta(\lambda.p) = \lambda\Delta(p).$$

.../...

2.2 Soit p une fonction quelconque de $\mathcal{P}_2$.

a) Déterminer la fonction $\Delta(p) = q$. En déduire que q est élément de $\mathcal{P}_1$.

b) Itérer le résultat précédent et en déduire que $\Delta^2(p) = \Delta\left(\Delta(p)\right)$ est une fonction constante.

c) On pose pour tout j de $\mathbf{N}$: $x_j = x_0 + jh$ et on suppose connaître les valeurs de p en x_0, x_1, x_2.

- Déterminer en fonction des $p(x_i)$, avec i élément de $\{0, 1, 2\}$, le vecteur $(d\,[i])_{0 \leq i \leq 2}$ sachant que $d\,[i] = \left(\Delta^i(p)\right)(x_0)$.
- Montrer que pour tout couple (i, j) de $\{0, 1, 2\} \times \mathbf{N}^*$on a :

$$\left(\Delta^i(p)\right)(x_j) = \left(\Delta^i(p)\right)(x_{j-1}) + \left(\Delta^{i+1}(p)\right)(x_{j-1}).$$

  NB:On cherchera à voir comment se construit la "table " (t_{ij}) où $t_{ij} = \left(\Delta^i(p)\right)(x_j)$, en précisant l'ordre de "remplissage" des cellules.

2.3 Application

On donne p par $p(x) = x^2 - x - 1; \quad h = 1; \quad x_0 = 0.$

Construire la table (t_{ij}) et en déduire $p(3)$ puis $p(4)$.

2.4 Sous les notations et hypothèses antérieures

a) Ecrire un algorithme *valeur* $(d, k \to val)$ qui à partir du vecteur d des trois valeurs $d\,[i] = \left(\Delta^i(p)\right)(x_0)$ $(i \in \{0, 1, 2\})$, fournit le vecteur val des k valeurs de la fonction polynôme p en les réels $x_{2+1}, x_{2+2}, ..., x_{2+k}$.

b) Quel est son intérêt?

c) Evaluer l'ordre de grandeur du temps d'exécution de cet algorithme en fonction de n et k.

d) Discuter brièvement de sa qualité parmi les algorithmes d'évaluation des fonctions polynômes en un point.

1.5 Généralisation

Proposer un plan de généralisation des résultats antérieurs.