Utbm mt40 **Examen médian** **Automne 2012**

Exercice 1

L'objet de l'exercice est d'utiliser l'interpolation polynômiale à des fins de dérivation approchée. L'étude est menée ici dans un cas très particulier, dont plusieurs aspects peuvent être généralisés. Chebyschev a obtenu dans ce domaine des résultats remarquables !

Soit f une fonction polynôme quelconque de degré 3, définie sur un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ avec $a < b$. On considère un réel t quelconque de $]a, b[$.

1.1 *Interpolation sur le support* $\{a, b, t\}$

a) Déterminer la fonction polynôme p_2 qui interpole f sur $\{a, b, t\}$ sans expliciter en détail le calcul des différences divisées intervenantes.

b) On considère la fonction erreur d'interpolation e, définie sur $[a, b]$ par :

$$e(x) = f(x) - p_2(x).$$

- Montrer que e est une fonction polynôme de degré 3, dont le coefficient dominant est celui de f, noté pour la suite α.
- Montrer que e s'annule pour $x = a$, $x = b$ et $x = t$.
- En déduire l'écriture de $e(x)$, pour tout x de $[a, b]$.

c) Montrer que l'expression de l'erreur d'interpolation permet d'écrire :

$$\forall x \in [a, b] \qquad f'(x) = p_2'(x) + e'(x).$$

d) Déduire de l'expresssion de $e(x)$ obtenue en fin de question b) que:

$$e'(t) = \alpha\,(t - a)\,(t - b)\,.$$

1.2 *Utilisation pour la dérivation approchée*

Soit x un réel quelconque de $[a, b]$.

a) Quelle valeur approchée de $f'(x)$ peut-on choisir ? Argumenter brièvement, en utilisant le cours de mt40.

b) On adopte la démarche retenue en 1.2 a) et on s'intéresse à $E(t) = |e'(t)|$, valeur absolue de l'erreur de méthode commise en remplaçant $f'(t)$ par $p_2'(t)$.

- Comment choisir t dans $]a, b[$ pour que $E(t)$ soit minimale ?
- Ce résultat est-il surprenant intuitivement ?

Exercice 2

L'objet de l'exercice est l'étude de quelques aspects de l'interpolation polynômiale conduisant à la production de logiciels de décomposition automatique d'une fraction rationnelle en éléments simples.

Soit n de $\mathbb{N}$ donné. On considère, pour tout l'exercice, une famille $\{x_0, ..., x_n\}$ de $n + 1$ points distincts de $\mathbb{R}$.

2.1 Soit N - comme numérateur ! -, une fonction de P_n, espace des fonctions polynômes de degré au plus n. On définit la suite $(y_i)_{0 \leq i \leq n}$ de $n + 1$ réels par:

$$\forall i \in \{0, ..., n\} \quad N(x_i) = y_i.$$

.../...

Montrer, sans calculs, que $N = p_n$, où p_n désigne le polynôme interpolateur de N sur le support $\{x_0, ..., x_n\}$.

2.2 *Lemmes techniques*

On considère la famille $(l_i)_{0 \le i \le n}$ des Lagrange associés au support $\{x_0, ..., x_n\}$; on définit D par:

$$D(x) = \prod_{j=0}^{n} (x - x_j).$$

a) Pour tout i de $\{0, ..., n\}$, montrer que:

$$D'(x_i) = \prod_{j=0 \text{ et } j \neq i}^{n} (x_i - x_j).$$

Indication: on pourra écrire:

$$D(x) = (x - x_i) \underbrace{\left(\prod_{j=0 \text{ et } j \neq i}^{n} (x - x_j) \right)}_{v(x)}$$

b) En déduire :

$$\forall i \in \{0, ..., n\} \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{x_0, ..., x_n\} \qquad l_i(x) = \frac{D(x)}{(x - x_i) D'(x_i)}$$

2.3 On considère p_n le polynôme, étudié sous 2.1, qui interpole N sur le support $\{x_0, ..., x_n\}$.

Montrer qu'on peut écrire:

$$\forall i \in \{0, ..., n\} \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{x_0, ..., x_n\} \qquad \frac{p_n(x)}{D(x)} = \sum_{i=0}^{n} \frac{\alpha_i}{(x - x_i)}$$

On déterminera, pour tout i de $\{0, ..., n\}$, α_i en fonction de $y_i = N(x_i)$ et de $D'(x_i)$.

2.4 *Synthèse de l'étude précédente*

On considère une fonction fraction rationnelle sans pôles multiples, notée R, définie par:

$$\forall x \in \mathbf{R} - \{x_0, ..., x_n\} \quad R(x) = \frac{N(x)}{\prod_{j=0}^{n} (x - x_j)} \quad \text{avec } N \in P_n.$$

a) Utiliser la théorie antérieure pour fournir la décomposition de $R(x)$ en éléments simples; on décrira, brièvement mais soigneusement, le plan de la méthode, en particulier les calculs et algorithmes intermédiaires nécessaires.

b) *Application*: Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle R donnée par :

$$R(x) = \frac{x + 1}{x\,(x - 1)\,(x - 2)}.$$

c) Proposer brièvement une critique de la méthode mise en oeuvre. Quels types de fractions rationnelles, permet-elle et ne permet-elle pas de décomposer en éléments simples ?

2.5 *Extension des résultats antérieurs*

Montrer comment utiliser la théorie antérieure pour se rendre capable de décomposer en éléments simples des fractions rationnelles présentant par exemple un pôle double.