Utbm mt40 **Examen médian** **Automne 2013 (durée 2h)**

Exercice 1 *Interpolation polynômiale*

On considère la fonction logarithme népérien sur l'intervalle $[1,2]$; on la note F.

1.1 *Interpolation linéaire de* F sur le support $\{1,2\}$

- Déterminer la fonction polynôme P_1 qui interpole F sur le support $\{1,2\}$.
- Soit E la fonction définie par: $E(x) = F(x) - P_1(x)$. Etudier les variations de E sur $[1,2]$.

1.2 On considère la fonction, notée f, dérivée de F sur $[1,2]$.

- Déterminer la fonction polynôme p_1 qui interpole f sur le support $\{1,2\}$.
- Soit e la fonction définie par: $e(x) = f(x) - p_1(x)$. Etudier les variations de e sur $[1,2]$.

1.3 Comparer les valeurs absolues des erreurs d'interpolation linéaire de F et de f. Discuter brièvement.

Exercice 2 *Intégration numérique*

On se propose d'étudier la qualité de l'intégration de Simpson pour le calcul approché de:

$$I = \int_1^2 f(x)dx \quad \text{où } f(x) = \frac{1}{x^2}.$$

On utilise les notations du cours; on pourra admettre tout résultat intermédiaire pour poursuivre la résolution de l'exercice.

2.1 Calculer I directement.

2.2 *Etude de l'erreur de méthode E_N^S commise en intégration de Simpson*

a) Montrer que f est C^4 sur $[1,2]$ et déterminer un majorant de $\left|f^{(4)}\right|$ sur $[1,2]$.

b) Déterminer en fonction de ε ($\varepsilon \in \mathbb{R}^{*+}$) le plus petit entier naturel N permettant d'affirmer que: $\left|E_N^S\right| < \varepsilon$.
En combien de points devra-t-on évaluer f pour obtenir la valeur approchée de l'intégrale ?

c) En déduire, en fonction de ε, le pas h associé à N, défini par: $Nh = 1$.

d) *Applications numériques*

Pour i élément de $\{1,2,3\}$ déterminer N_i et h_i associés à ε_i sachant que:

$$\varepsilon_1 = 10^{-2}; \quad \varepsilon_2 = 10^{-4}; \quad \varepsilon_3 = 10^{-6}.$$

2.2 On se propose d'étudier désormais I_N^S la valeur approchée, obtenue par méthode de Simpson, de l'intégrale I.

a) *Lemmes techniques*

Soit k un élément de $\mathbb{N}^*$. On définit $S(k)$ par:

$$S(k) = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i^2}.$$

On admettra qu'il existe une fonction connue, appelée fonction gamma de deuxième espèce, permettant de calculer $S(k)$; par suite on tentera d'écrire toutes les quantités utiles à l'expression de I_N^S en fonction de termes de la forme $S(k)$.

On note $\mathcal{I}(k)$ [respectivement $\mathcal{P}(k)$] la sous-somme de $S(k)$ des inverses de carrés des seuls entiers i impairs [respectivement i pairs]; autrement dit:

$$\mathcal{I}(k) = \sum_{\substack{i=1 \\ i \text{ impair}}}^{k} \frac{1}{i^2} \quad \text{et} \quad \mathcal{P}(k) = \sum_{\substack{i=1 \\ i \text{ pair}}}^{k} \frac{1}{i^2}.$$

- Fournir par un calcul direct: $S(4)$, $\mathcal{I}(4)$ et $\mathcal{P}(4)$. Vérifier que: $S(4) = \mathcal{I}(4) + \mathcal{P}(4)$.
- Montrer qu'on peut écrire:

$$\mathcal{P}(k) = \frac{1}{4} \sum_{j=1}^{Ent(k/2)} \frac{1}{j^2} \quad \text{où } Ent(k/2) \text{ désigne la partie entière de } k/2.$$

- En déduire que :

$$\mathcal{P}(k) = \frac{1}{4} S\left(Ent(k/2)\right) \text{ d'où } \quad \mathcal{I}(k) = S(k) - \frac{1}{4} S\left(Ent(k/2)\right).$$

- Pour tout entier naturel non nul N on pose :

$$K_1 = \sum_{i=2N}^{4N} \frac{1}{i^2} \quad \text{et} \quad K_2 = \sum_{\substack{i=2N \\ i \text{ impair}}}^{4N} \frac{1}{i^2}.$$

  Montrer que :

$$K_1 = S(4N) - S(2N-1) \quad \text{et que} \quad \sum_{\substack{i=2N \\ i \text{ pair}}}^{4N} \frac{1}{i^2} = \frac{1}{4}\left[S(2N) - S(N-1)\right].$$

- En déduire que :

$$K_2 = S(4N) - S(2N-1) - \frac{1}{4}\left[S(2N) - S(N-1)\right].$$

b) *Utilisation pour le calcul de* I_N^S

Soit N un entier naturel non nul et h le pas d'intégration sur $[1, 2]$ associé; on a donc $Nh = 1$. Pour tout i de $\{1, ..., 4N\}$, on pose:

$$X_i = i\frac{h}{2}.$$

- Montrer que $X_{2N} = 1$, $X_{4N} = 2$ et $f(X_i) = \frac{4}{h^2}\frac{1}{i^2}$.
- Montrer que I_N^S peut s'écrire :

$$I_N^S = \frac{h}{6}\left[\left\{2\left(\sum_{i=2N}^{4N} f(X_i)\right) - f(1) - f(2)\right\} + 2 \sum_{\substack{i=2N \\ i \text{ impair}}}^{4N} f(X_i)\right]$$

  c'est-à-dire:

$$I_N^S = \frac{h}{6}\left[\left\{2\frac{4}{h^2}K_1 - 1 - \frac{1}{4}\right\} + 2\frac{4}{h^2}K_2\right] \quad \text{soit} \quad I_N^S = \frac{h}{6}\left[\frac{8}{h^2}(K_1 + K_2) - 1 - \frac{1}{4}\right].$$

- En déduire l'écriture finale de I_N^S:

$$I_N^S = \frac{1}{6N}\left[8N^2\left\{2S(4N) - 2S(2N-1) - \frac{1}{4}\left[S(2N) - S(N-1)\right]\right\} - \frac{5}{4}\right].$$

c) *Applications numériques*

On fournit grâce aux tables suivantes, les valeurs de S en les points k indiqués:

k	1	3	4	8	9	10
$S(k)$	$1,00000000$	$1,36111111$	$1,42361111$	$1,52742205$	$1,53976773$	$1,54976773$

k	14	20	29	30	60
$S(k)$	$1,57599584$	$1,59616324$	$1,61103901$	$1,61215012$	$1,62840552$

- Donner les trois valeurs approchées de I obtenues à partir des N_i déterminés dans la question .
  - Vérifier qu'elles sont cohérentes avec la précision attendue.

d) Prolongement...

En utilisant les outils développés dans mt40, quelle méthode proposeriez-vous pour déduire des trois évaluations de I_N^S en $\{N_1, N_2, N_3\}$ la valeur en un point N quelconque ?