Exercice 1 *Erreur globale en interpolation polynômiale: effet des points de support*

Soit f la fonction définie sur $[-1,1]$ par $f(x) = x^3 + x + 1$.

1.1 *Interpolation sur le support* $\{-1,0,1\}$

a) Déterminer la fonction polynôme p_{21} qui interpole f sur $\{-1,0,1\}$.

b) En déduire l'écriture polynômiale explicite sur $[-1,1]$ de la fonction e_1 définie par $e_1 = |f - p_{21}|$.

c) Donner le tableau des variations de la fonction e_1 sur $[-1,1]$.

1.2 *Interpolation sur le support* $\left\{-\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$, *appelés points de Tchebychev*

a) Déterminer la fonction polynôme p_{22} qui interpole f sur $\left\{-\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$.

b) En déduire l'écriture polynômiale explicite sur $[-1,1]$ de la fonction e_2 définie par $e_2 = |f - p_{22}|$.

c) Donner le tableau des variations de la fonction e_2 sur $[-1,1]$.

1.3 *Comparaison des interpolations*

a) Représenter graphiquement dans le même repère du plan, les fonctions e_1 et e_2.

b) Interpréter les résultats obtenus.

Exercice 2 *Variante pour le calcul des différences divisées*

L'objet de l'exercice est d'établir un résultat destiné à la majoration de l'erreur de méthode commise lors d'une interpolation polynômiale sur un intervalle fermé borné $I = [a,b]$ de $\mathbb{R}$..

On considère une fonction f continue sur I et $\{x_0, ..., x_{n+1}\}$ $n+2$ points distincts de $[a,b]$.

2.1 *Résultats techniques*

a) On note $\|f\| = \sup\limits_{x\in[a,b]} (|f(x)|)$. Justifier l'existence de $\|f\|$.

b) On considère la fonction u définie par :

$$u(x) = \prod_{j=0}^{n+1} (x - x_j).$$

Montrer que u est dérivable sur $\mathbb{R}$; on ne fournira pas ici de nombre dérivé.

c) *Calcul du nombre dérivé en des points particuliers*

- Pour tout i de $\{0, ..., n+1\}$ on pose :

$$u(x) = (x - x_i)\, v(x) \quad \text{avec } v(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n+1} (x - x_j).$$

En considérant u comme un produit, donner $u'(x)$ en fonction de $v(x)$ et $v'(x)$.

.../...

- En déduire que :

$$u'(x_i) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n+1} (x_i - x_j).$$

2.2 *Utilisation pour l'expression rapide de différences divisées*

Déduire que pour toute fonction g définie sur $[a, b]$, on peut écrire:

$$g\left[x_0, ..., x_{n+1}\right] = \sum_{i=0}^{n+1} \frac{g(x_i)}{u'(x_i)}.$$

Indication

On écrira le polynôme d'interpolation de g sur $\{x_0, ..., x_{n+1}\}$ dans les bases de Lagrange et Newton associées et on identifiera les deux expressions de son coefficient dominant.

2.3 *Mise en oeuvre algorithmique*

a) Proposer un algorithme $diff\_divisees(X, G \rightarrow diff\_g)$ qui, en utilisant les outils de mt40, à partir

- d'un vecteur $X = (x_0, ..., x_{n+1})$ de $n+1$ points distincts de $[a, b]$,
- d'une représentation informatique G de la fonction g définie sur $[a, b]$, permettant son évaluation en un réel quelconque
- renvoie une valeur approchée $diff\_g$ de $g\left[x_0, ..., x_{n+1}\right]$.

b) Si g est polynôme, que choisirez-vous pour G ?

c) Si vous travaillez sous matlab, que choisirez-vous pour G en général ?

Exercice 3 *Intégration numérique pour une situation industrielle*

3.1 *Cadre de l'étude*

Dans un laboratoire industriel, un ingénieur étudie un signal u fonction du temps; pour des raisons théoriques, il sait que ce signal est sinusoïdal, c'est-à-dire qu'il existe des réels u_m, ω et φ (inconnus !) tels que :

$$u(t) = u_m \sin(\omega t + \varphi).$$

Le signal u est connu seulement par des mesures dont l'acquisition sur un PC se fait au rythme de 12000 par seconde, chacune d'elles nécessitant 6 octets. On suppose que le signal est "propre" grâce à un prétraitement; il n'existe donc plus de mesures aberrantes...

Le laboratoire dispose de deux outils informatiques en particulier:

- une fonction *int.simpson* (u, a, b) capable de calculer par méthode de Simpson une valeur approchée de l'intégrale $I = \int_a^b u(t)dt$, pour tous a et b donnés.
- une fonction *dates.changements* (u, a, b) capable de détecter le nombre des changements de signes du signal u entre les dates a et b.

Problème posé : L'ingénieur responsable de l'étude doit déterminer une valeur approchée précise de la période T du signal; il est certain, par expérience, que la valeur de T est comprise entre 1 et $1,5$ seconde.

On note t_0 la date du début des mesures; $u(t_0)$ est évidemment quelconque et ne sera nulle par exemple qu'avec une très faible probabilité...

.../...

3.2 *Première solution envisagée*

L'ingénieur se propose d'acquérir k cycles consécutifs du signal u et de fournir une valeur moyenne de la longueur des cycles étudiés.

a) Fournir le plan de la méthode mise en oeuvre pour fournir une valeur approchée de la période T.

b) Si par exemple $k = 10$, combien d'espace mémoire (en *kilo octets*) aura été nécessaire environ pour l'obtention du résultat ?

3.3 *Variante utilisant le calcul intégral*

Dès le début des mesures à l'instant t_0, l'ingénieur responsable met en route le calcul de l'intégrale du signal et cherche à détecter la première date b telle que $b - t_0$ corresponde à une période. On utilisera des représentations graphiques pour illustrer la situation.

a) Si l'intégrale $I(b) = \int_{t_0}^{b} u(t)dt$ est nulle, $b - t_0$ représente-t-elle nécessairement une valeur approchée de T ?

b) Quelle condition complémentaire faut-il imposer pour obtenir assurément une valeur de T ?

c) Fournir le plan de la méthode mise en oeuvre pour obtenir une valeur approchée de T, dans cette seconde version.

d) Quel est l'intérêt de cette solution par rapport à la première envisagée ?

Nb : Cette variante, reconnue comme la meilleure solution au problème posé; est utilisée depuis chez un grand constructeur voisin de l'Utbm après une étude menée dans le cadre d'une TX par deux anciens étudiants de mt40 !