

**MT41**  
*Techniques Mathématiques pour l'Ingénieur*

UTBM le 15 Janvier 2007

Examen final

S. Abboudi

Résumé de cours autorisé

\*\*\*

### I- Calcul des variations

Déterminer la courbe extrémale de la fonctionnelle :

$$J(x(t)) = \int_{t_1}^{t_2} 2x^2(t) - 3x'^2(t) dt, \quad t_1 = 0, t_2 = 10, \quad x(t_1) = 1 \text{ et } x'(t_1) = 2$$

**II- Distribution**       $d(x)$  : Dirac,  $P(x)$  : Porte,  $H(x)$  : Heaviside.

1) Les produits ci-dessous sont-ils toujours possibles ? justifier

- a)  $f(x).g(x)$        $f(x), g(x)$  : deux fonctions localement sommables
- b)  $y(x).f(x)$        $f(x)$  : fonction loc. som.,  $y(x)$  : fonction indéfiniment dérivable.
- c)  $f(x).g(y)$        $f(x), g(y)$  : deux fonctions localement sommables
- d)  $f(x)*g(x)$        $f(x), g(x)$  : deux fonctions sommables

2) Simplifier les distributions singulières

$$T(x) = (\sin(x) + x - 1)d(x - 2)$$

et  $S(x) = (\sin(x) + x - 1)d'(x)$

3) Calculer la dérivée première des distributions :

$$T(x) = H(2 - x) - H(1 - x)$$

$$S(x) = T(x)\cos(3x)$$

et  $R(x) = \cos(3x).P(ax + b)$ ,  $a$  et  $b$  des constantes.

Déterminer  $a$  et  $b$  pour que  $S(x) = R(x)$  ou  $S'(x) = R'(x)$

### III- Produit de convolution

1) Calculer le produit de convolution  $d''(x)*xH(x)$  et conclure.

2) On considère l'équation :  $u''(x) = p(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$

Calculer la réponse impulsionnelle du système et par suite la solution de cette équation dans les cas où le second membre  $p(x) = \exp(-x)$  est défini sur l'intervalle  $[1, +\infty]$  puis sur l'intervalle  $[1, 2]$ .