

MT41
Techniques Mathématiques pour l'Ingénieur

UTBM le 27 Juin 2006

Examen final

S. ABBOUDI

Résumé de cours autorisé

I- Distribution $d(x)$: Dirac, $P(x)$: Porte, $H(x)$: Heaviside, $F(x)$: fonction test

1) Calculer au sens des distributions :

a) $\sin(x) d(3x)$

b) $\sin(2x) d'(x)$

c) $\sin(x) d(x-3)$

2) Calculer les dérivées première et seconde de la distribution :

$$T(x) = |\sin(2x)| \quad \text{si } p/2 < x < 3p/2 \quad \text{et} \quad 0 \quad \text{sinon}$$

II- Produit de convolution

1) Calculer le produit de convolution : $[a d''(t) + b d(t)] * H(t) \sin(\omega t)$

Déterminer, en fonction de ω , les coefficients a et b pour que l'une des deux distributions soit l'inverse de l'autre.

2) On considère l'équation différentielle :

$$u''(t) + a^2 u(t) = e(t)$$

$e(t)$ étant une perturbation imposée à partir de $t > 0$, a une constante.

On cherche une solution au sens des distributions de la forme $U(t) = H(t)u(t)$.

a) Ecrire ce système sous forme d'une équation de convolution dans D'_+ et déterminer, en s'inspirant de la question 1, sa réponse impulsionnelle $R(t)$ ($e(t) = d(t)$).

b) En déduire ensuite la solution du système pour une perturbation de la forme : $e(t) = H(t) \exp(-t)$ puis $e(t) = P(t) \exp(-t)$.

III- Calcul des variations

Déterminer la courbe extrémale de la fonctionnelle :

$$J(y(x)) = \int_0^1 (y'^2(x) + y^2(x) + a y(x)) dx, \quad \text{avec } y(0) = 1 \text{ et } y(1) = 2$$

Etudier les cas $a = 0$ et $a = 1$.