

MT41
Techniques Mathématiques pour l'Ingénieur

UTBM le 27 juin 2008

Examen final

S. Abboudi, F. Peyraut

Résumé de cours autorisé

I- Calcul des variations

Déterminer la courbe extrémale de la fonctionnelle :

$$J(x(t)) = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1+x^2(t)} \sqrt{1+x'^2(t)} dt, \quad t_1 = -1, t_2 = 1,$$
$$x(t_1) = 1 \text{ et } x(t_2) = 1$$

II- Distribution $\delta(x)$: Dirac, $\Pi(x)$: Porte, $H(x)$: Heaviside, $\phi(x)$: fonction test.

1) Calculer le résultat du test des distributions suivantes sur une fonction test $\phi(x)$:

$$T(x) = (2x + 1)\delta(3x - 4)$$

$$S(x) = (x^2 + x + 1)\delta'(x - 1)$$

En déduire une égalité au sens des distributions.

2) Calculer la dérivée première des distributions :

$$T(x) = H(3 - x) - H(-1 - x)$$

$$S(x) = (T(x) - H(x))\sin(2x)$$

$$P(x) = T(x) + H(x - 1)$$

Déterminer a et b pour que $P(x) = \Pi(ax + b)$

III- Produit de convolution

1) Vérifier que la distribution $R(x) = \frac{x^2}{2}H(x)$ est la réponse impulsionnelle d'un système décrit par l'équation différentielle : $y'''(x) = e(x)$, $x \in \mathbb{R}$

2) En déduire ensuite la solution $y(x)$ de cette équation dans les cas où $e(x) = H(x)\sin x$ et $e(x) = H(x - 1)$ et enfin $e(x) = H(3 - x)$.