

**MT41**  
**Techniques Mathématiques pour l'Ingénieur**

UTBM le 26 Juin 2009

Examen final

S. ABBOUDI

Résumé de cours autorisé

\*\*\*

### I- Calcul des variations

Déterminer les courbes extrémales (min ou max) des fonctionnelles :

$$J(y(x)) = \int_0^1 (y'^2(x) + y(x)) dx$$

$$J(y(x)) = \int_0^1 (y'^2(x) + ay^2(x)) dx, \text{ étudier en fonction du réel } a$$

$$J(y(x)) = \int_0^1 (y'^2(x) + y^2(x) + 2y(x)e^x) dx,$$

Déterminer, les constantes d'intégration en supposant  $y(0) = 0$  et  $y(1) = 1$ .

### II – Série de Fourier

On considère la fonction  $f(x) = \pi - 2x$ ,  $0 \leq x \leq \pi$ , paire et périodique de période  $2\pi$ .

- 1) Tracer le graphe de  $f(x)$  sur le domaine  $[-3\pi, 3\pi]$ , vérifier qu'elle est bien paire.
- 2) Calculer les coefficients de Fourier de  $f(x)$ .
- 3) En déduire la somme des séries :

$$S_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \text{ et } S_2 = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2}$$

puis celle des séries :

$$S_3 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4} \text{ et } S_4 = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^4}$$

### III – Transformée de Fourier

1) Calculer la transformée de Fourier de la fonction :

$$f(x) = \begin{cases} \pi - x & \text{si } 0 < x < \pi \\ x + \pi & \text{si } -\pi < x < 0 \\ 0 & \text{si non} \end{cases}$$

2) On suppose connue la transformée de Fourier de la fonction  $e^{-a|x|}$ .

En déduire la T.F. de la fonction  $e^{-|2x|}$ ,  $e^{-|x-3|}$  puis de celle de  $xe^{-|x-3|}$ .