

XI41
Techniques Mathématiques pour l'Ingénieur

UTBM le 21 Janvier 2011

Examen final

S. ABBOUDI

Résumé de cours autorisé

I- Calcul des variations

1- Déterminer la courbe minimisant, sur le domaine temporel $[t_0, t_1]$, l'écart entre les énergies cinétique $E_c = \frac{1}{2}mv^2$ et potentielle $E_p = mgy$ d'un corps pesant, de masse m , en chute libre, lâché avec une vitesse initiale V_0 à partir de la position y_0 à $t_0 = 0$.

2- Déterminer la forme générale des courbes extrémales de la fonctionnelle :

$$J(y(x)) = \int_a^b y(x) \sqrt{1 + y'(x)} dx \quad \text{avec } y(a) = y_a \text{ et } y(b) = y_b$$

II- Distributions δ : Dirac, Π : porte, H : Heaviside

1- Calculer au sens des distributions : $(x-2)\delta(x-3)$ et $(x-2)\delta'(x-3)$

2- Calculer les dérivées première et seconde des distributions :

$$f(x) = \frac{x^2}{\text{sgn}(x)} \quad -1 \leq x \leq 2 \quad \text{et} \quad g(x) = \sin(\pi x) \Pi(-2x) \quad x \in \mathbb{R}$$

$\text{sgn}(x) = \text{signe de } x$ (égal -1 si $x \leq 0$ et 1 si $x \geq 0$)

III- Série de Fourier

Soit f la fonction 2π -périodique sur \mathbb{R} telle que $f(x) = |x|$ si $|x| < \pi$:

1. Déterminer la série de Fourier de $f(x)$

2. En déduire les valeurs de $\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}$ et de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

3. Calculer $\int_{-\pi}^{\pi} |x|^2 dx$ et en déduire la valeur de la série : $\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^4}$.