

MT41
Techniques Mathématiques pour l'Ingénieur

UTBM le 13 Janvier 2015

Examen final

S. Abboudi, F. Peyraut

Résumé de cours autorisé

I- Calcul des variations

1- On lâche une bille de masse m , sous son propre poids, d'une hauteur h . Déterminer sa trajectoire $z(t)$ si on suppose que son mouvement obéit au principe du moindre action (càd minimisant l'écart entre les énergies cinétique et potentielle au cours du temps). Les frottements avec l'air sont supposés négligeables. Calculer le temps que met la bille pour atteindre le sol une masse $m=10\text{ g}$ et une hauteur $h=100\text{ m}$.

2-Déterminer la solution minimisant la fonctionnelle $J(y(x)) = \int_0^1 \frac{y(x)}{y'(x)} dx$, avec $y(0)=1$, $y(1)=2$.

II - Série de Fourier (SF)

Calculer les coefficients de Fourier de la fonction 2 périodique :

$$f(x) = \begin{cases} 1-x & 0 \leq x < 1 \\ 1+ax & -1 \leq x < 0 \end{cases} .$$

Dans les cas $a=1$ puis $a \neq 1$

et en déduire la somme : $S = 1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \dots$

III - Transformée de Fourier (TF)

1) Calculer la TF de la fonction $g(x) = \begin{cases} f(x) & -1 \leq x < 1 \\ 0 & \text{si non} \end{cases}$ dans le cas $a=1$.

2) En déduire la valeur de l'intégrale : $\int_0^{\infty} \frac{1 - \cos(2\pi x)}{x^2} dx$

3) Utiliser les propriétés des TF pour en déduire celles des fonctions $g(x-2)$ et $xg(2x)$.