

**MT41**  
**Techniques Mathématiques pour l'Ingénieur**

UTBM le 24 Juin 2015

Examen final

S. Abboudi

Résumé de cours autorisé

\*\*\*

**I- Calcul des variations**

1) Les extrémités d'une corde pesante de longueur  $L=3$ , de section  $S=1 \text{ cm}^2$  et de densité  $\rho=1200 \text{ kg/m}^3$ , sont est fixées aux points  $A(0,0)$  et  $B(2,0)$ . Déterminer la forme (courbe) extrémale de cette corde minimisant son énergie potentielle.

2) Déterminer la courbe extrémale de la fonctionnelle :

$$J(y(x)) = \int_1^2 \frac{1}{x} (\sqrt{1+y'^2(x)}) dx \quad \text{avec} \quad y(1)=0 \text{ et } y(2)=1.$$

**II - Série de Fourier (SF)**

1) Calculer les coefficients de Fourier des fonctions  $2\pi$  périodiques  $f(x) = e^x$  et  $g(x) = |\sin x|$  définies sur  $[-\pi, \pi]$ .

2) En déduire la valeur des sommes :  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2}$  et  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$ .

**III – Transformée de Fourier (TF)**

1) Calculer la transformée de Fourier de la fonction :

$$f(x) = 1 - |x| \text{ si } x \in [-1,1] \text{ et } 0 \text{ si non.}$$

En déduire la valeur de l'intégrale  $\int_0^{\infty} \frac{(\sin x)^4}{x^4} dx$

2) A partir des transformées de Fourier de fonctions usuelles ( $\Pi(x)$  et  $e^{-a|x|}$ ) vues en cours, utiliser les propriétés des TF pour en déduire celles des fonctions

suivantes :  $\Pi(1-x)$ ,  $x\Pi(2x)$ ,  $\frac{1}{1+(x-3)^2}$