Utbm mt42 Examen final Automne 2005

Nb: Les deux exercices seront rédigés sur des feuilles séparées.

Exercice 1

On considère l'ensemble $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ des couples d'entiers positifs.

1.1 *Définition de relations d'équivalence sur* $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$

(a) On définit sur $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ la relation R par :

$$\forall (x,y)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N} \quad \forall (x',y')\in\mathbb{N}\times\mathbb{N} \quad [(x,y)\, R\, (x',y')] \Longleftrightarrow [\exists k\in\mathbb{Z} \quad (x',y')=(x,y)+(k,0)]\,.$$

Que signifie le fait que deux couples sont liés par R ? A quelle condition, ne le sont-ils pas ?

- Montrer que R est une relation d'équivalence.
- Représenter graphiquement la classe $\overline{(a,b)}$ d'un élément (a,b) de $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ modulo R.
- Démontrer que, modulo R :
$$\overline{(a,b)}=\{(u,b)\,/u\in\mathbb{N}\}\,.$$

(b) On définit sur $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ la relation S par :

$$\forall (x,y)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N} \quad \forall (x',y')\in\mathbb{N}\times\mathbb{N} \quad [(x,y)\, S\, (x',y')] \Longleftrightarrow [\exists k\in\mathbb{Z} \quad (x',y')=(x,y)+(0,k)]\,.$$

Que signifie le fait que deux couples sont liés par S ? A quelle condition, ne le sont-ils pas ?

- Montrer que S est une relation d'équivalence.
- Représenter graphiquement la classe $\overline{(a,b)}$ d'un élément (a,b) de $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ modulo S.
- Démontrer que, modulo S :
$$\overline{(a,b)}=\{(a,v)\,/v\in\mathbb{N}\}\,.$$

1.2 *Etude des relations composées*

(a) Déterminer la relation $R\circ S$. On fournira l'écriture ensembliste de $R\circ S$ et on prouvera l'égalité proposée.

(b) Mêmes questions pour $S\circ R$.

1.3 *Etude des puissances de* R et de S

Montrer que pour tout entier naturel non nul k on a :

$$R^k = R \quad \text{et} \quad S^k = S.$$

Exercice 2

Dans le cadre d'une étude de complexité d'un algorithme, on cherche à obtenir un certain nombre de résultats standards fréquemment utilisés dans ce type de problématiques.

2.1 *Etude du nombre de surjections de* X dans Y *: version 1*

On considère deux ensembles X et Y de cardinaux respectifs p et n. On souhaite déterminer le nombre $S(p,n)$ de surjections de X dans Y.

(a) *Cas particuliers*

- Déterminer le nombre $S(p,n)$ pour $p\leq n$.

- On suppose désormais que $p > n$.
  Déterminer pour tout $p > 1$, le nombre $S(p, 1)$.

(b) *Cas général*

Une étude connue de l'ingénieur responsable, a permis d'établir que $S(p, n)$ vérifie la propriété suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \forall p \in \mathbb{N}^* \left[(p > n) \Rightarrow \left(S(p, n) = n^p - \sum_{i=1}^{n-1} C_n^i S(p, i) \right) \right].$$

- En déduire le plan d'un algorithme $nbsurj1(p, n)$, qui à partir de deux entiers naturels non nuls quelconques p et n, renvoie le nombre $S(p, n)$ des surjections de X dans Y, ensembles de cardinaux respectifs p et n.
- Déterminer $S(5, 3)$: on pourra visualiser l'arborescence des calculs menant à la quantité cherchée.

2.2 *Etude du nombre de surjections de* X dans Y *: version 2*

Pour toute cette partie, lorsqu'on étudiera un exemple, on considérera $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ et $Y = \{6, 7, 8\}$.

(a) Pour tout y de Y, on note F_y l'ensemble des fonctions de X dans $Y - \{y\}$.

- *Etude d'un exemple*
  - Proposer deux fonctions de F_7.
  - Une fonction de F_7 peut-elle être dans F_8 ?
- *Etude générale*
  - Montrer qu'une fonction f de X dans Y est une surjection si et seulement si :
    $$(P) \qquad f \in Y^X - \bigcup_{y \in Y} F_y.$$
  - Donner le cardinal $\left|Y^X\right|$ de Y^X
  - Montrer que le cardinal de F_y est, quelque soit le y choisi, donné par :
    $$|F_y| = (n-1)^p.$$
  - Combien existe-t-il de façons de choisir y pour obtenir les différents ensembles F_y ?
  - En déduire le cardinal de $\left| \bigcup_{y \in Y} F_y \right|$ par le théorème d'inclusion-exclusion.
  - Montrer, grâce à la relation (P), que $S(p, n)$.est donné par :
    $$S(p, n) = n^p - C_n^1 (n-1)^p + C_n^2 (n-2)^p + ... + (-1)^{n-1} C_n^{n-1} (n - (n-1))^p.$$

(b) En déduire la valeur de $S(5, 3)$ via la relation établie au (a) précédent.

2.3 *Coût d'obtention de* $S(p, n)$

(a) *Production des* C_n^k

- Proposer une version optimisée d'algorithme de calcul des combinaisons. On notera cet algorithme $comb(n, k)$: à partir des entiers naturels n de $\mathbb{N}$ et de k vérifiant $0 \leq k \leq n$, il renvoie C_n^k.
- Pour n donné, étudier la complexité de l'algorithme $comb(\,)$ en fonction de k.
- En déduire le coût moyen de production d'un C_n^k.

(b) Les questions 2.1 et 2.2 proposent deux variantes d'obtention des $S(p, n)$.

Comparer leur coût et intérêt respectifs, selon la nature des résultats dont on souhaite disposer.