Utbm mt42 **Examen final** **Automne 2006**

Nb: Les deux exercices seront rédigés sur des feuilles séparées.

Exercice 1 *Relations*

1.1 *Etude d'un cas particulier*

On donne un ensemble $E = \{e_1, ..., e_4\}$. Soit R_4 la relation binaire interne sur E définie par:

$$R_4 = \{(e_1, e_2), (e_3, e_2), (e_1, e_4), (e_4, e_3), (e_2, e_4)\}.$$

a) Fournir la matrice booléenne $\mathcal{R}_4$ associée à R_4.

b) Définir sous forme ensembliste les relations R_4^2, R_4^3, R_4^4.

c) On suppose ne pas disposer du théorème liant composée de relations binaires et produit de leurs matrices booléennes associées. On se propose de déterminer $R_4 \circ R_4$ par la seule définition des relations composées. On pose $n = 4$.

- Proposer un algorithme *recherche* $((e_i, e_j))$ qui, à partir d'un couple (e_i, e_j) de E^2 retourne 1 si et seulement si $(e_i, e_j) \in R_4 \circ R_4$, 0 sinon.
- Exprimer en fonction de n la complexité de l'algorithme *recherche* ()
- En déduire la complexité en fonction de n de la détermination, par la seule définition des relations composées, de $R_4 \circ R_4$.
- Confronter ce résultat à celui issu du théorème précité. Discuter brièvement.

1.2 *Etude de chemins de longueur p ($p \in \mathbb{N}^*$)*

a) Soit R une relation binaire quelconque sur E et $\mathcal{R}$ sa matrice booléenne associée.

On donne la définition suivante:

Définition

Soit e_i et e_j deux éléments quelconques de E.

On dit qu'il existe un chemin (sous R) de longueur p de e_i à e_j

ssi il existe une suite $(q_0, ...q_p)$ d'éléments de E vérifiant:

$$q_0 = e_i \ , \ q_p = e_j \quad \text{et} \quad \forall r \in \{0, ..., p-1\} \ \ (q_r, q_{r+1}) \in R.$$

a1) *Exemples*

Fournir les chemins de longueur 1, puis 2 sous la relation R_4.

a2) Comment pourrait-on définir un cycle sous une relation R?

b) Soit p de $\mathbb{N}^*$. Démontrer par récurrence la propriété $\mathcal{P}(p)$ suivante:

$$\mathcal{P}(p) : \left\{ \begin{array}{l} \text{Soit } \mathcal{B}_p = (b_{ij}) \text{ la matrice booléenne définie par } \mathcal{B}_p = \mathcal{R}^p. \\ \text{Il existe un chemin sous } R \text{ de longueur } p \text{ de } e_i \text{ à } e_j \text{ ssi } b_{ji} = 1. \end{array} \right.$$

c) *Application*

Combien existe-t-il de chemins de longueur $1, 2, 3, 4$ sous R_4?

.../...

1.3 *Utilisation en termes de contrôles de logiciels*

On considère un logiciel important L constitué d'un nombre (fini!) de modules.notés $E_1, ..., E_n$.

Pour représenter son exécution, on définit une relation binaire R sur l'ensemble des modules, comme suit.

On dit que $(E_i, E_j) \in R$ ssi lors de l'exécution de L le module E_i est suivi du module E_j.

Montrer comment la théorie développée peut servir à détecter un cycle infernal dans l'exécution de L.

Exercice 2 *Fonctions booléennes*

2.1 *Etude de la fonction comparateur binaire*

L'objet du début de l'exercice est l'étude de la fonction "comparateur binaire de taille 2", notée $\mathcal{C}_2$. Celle-ci compare, bit à bit, deux mots binaires de deux bits chacun $A = (a_1, a_2)$ et $B = (b_1, b_2)$, suivant la définition :

$$\begin{array}{llrcl} \textbf{si} & [a_1 = b_1 \textbf{ et } a_2 = b_2] & \textbf{alors } \mathcal{C}_2(A,B) & = & 1 \\ & & \textbf{sinon } \mathcal{C}_2(A,B) & = & 0. \end{array}$$

a) Exprimer $\mathcal{C}_2(A, B)$ comme fonction booléenne $f_{\mathcal{C}_2}$ des quatre variables (a_1, b_1, a_2, b_2).

b) Minimiser l'écriture de $f_{\mathcal{C}_2}(a_1, b_1, a_2, b_2)$ en tant que somme de produits.

c) Minimiser l'écriture de $f_{\mathcal{C}_2}(a_1, b_1, a_2, b_2)$ en tant que produit de sommes.

d) Pouvez-vous proposer une forme pour $f_{\mathcal{C}_2}(a_1, b_1, a_2, b_2)$ plus petite que les précédentes (moins de monômes et/ou des monômes plus petits) par exemple, en vous inspirant de la définition de la fonction ?

2.2 *Diagrammes binaires de décision*

a) *Définitions et notations*

- Les diagrammes binaires de décision (DBD) sont des représentations des fonctions booléennes qui offrent de nombreux avantages lorsqu'il s'agit de fonctions d'un nombre important de variables. Par exemple, la figure 1 présente un DBD pour la fonction f définie par:

$$f(x_1, x_2, x_3) = \overline{x}_1 x_2 \overline{x}_3 + \overline{x}_1 \overline{x}_2 x_3.$$

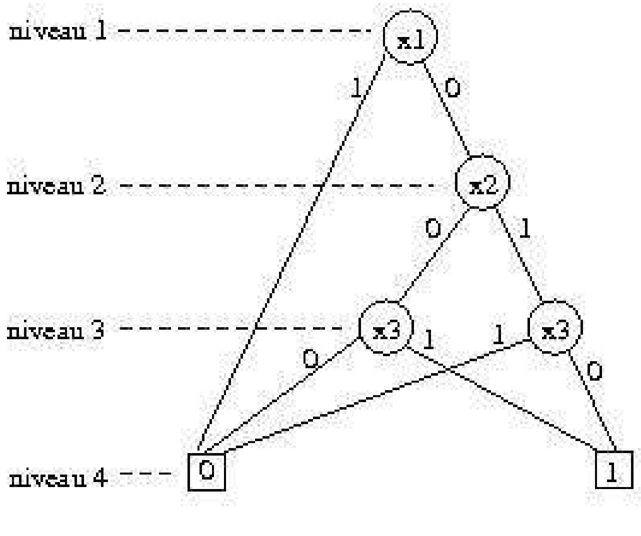

figure 1

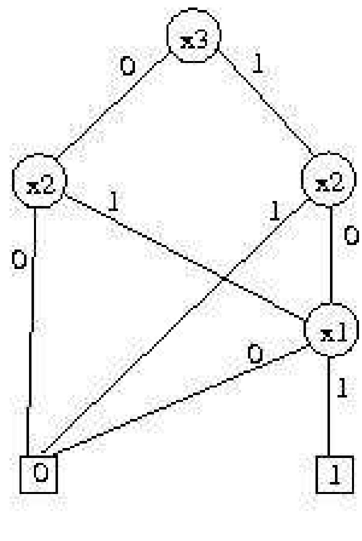

figure 2

- On constate qu'il y a un niveau du diagramme pour chaque variable (tous les sommets d'un niveau donné sont étiquetés par la même variable). Il y a aussi un niveau pour les constantes binaires (0 et 1). D'autre part, chaque sommet associé à une variable a deux branches descendantes, une pour la valeur 0 et l'autre pour la valeur 1
- Pour connaître la valeur de $f(1,0,1)$ on part du niveau 1 (variable x_1) en direction 1, au niveau 2 (variable x_2) en direction 0 et au niveau 3 (variable x_3) en direction 1, on arrive au niveau 4, valeur 1. Par conséquent, $f(1,0,1) = 1$. On constate que le DBD montrera rapidement que si $x_1 = 1$ alors $f = 0$, quelle que soit la valeur des autres variables.
- Mais étant donnée une fonction, le DBD n'est pas unique Il diffère en particulier suivant l'ordre des variables, suivant la façon dont elles sont assignées à chacun des niveaux, sachant qu'il y a toujours un niveau par variable. La figure 2 montre le DBD de $f(x_1, x_2, x_3)$ donné ci- dessus, lorsque l'ordre choisi est x_3, x_2, x_1. On constate que ce DBD (fig 2) est un peu plus "gros" que le premier (fig 1). En effet, le premier comporte un chemin de longueur 1 et 4 de longueur 3, alors que le deuxième comporte 2 chemins de longueur 2 et 4 chemins de longueur 3.

b) Proposer un DBD pour la fonction comparateur $f_{\mathcal{C}_2}$ de la question 2.1, en réfléchissant à l'ordre des variables pour avoir un diagramme le plus simple que possible.

Suggestion : le DBD sera d'autant plus simple qu'on pourra décider rapidement de la valeur de la fonction.

Ainsi, l'ordre des variables de la figure 1 est meilleur car si $x_1 = 0$ on voit tout de suite que $f = 0$.

Comment la fonction $f_{\mathcal{C}_2}$ peut-elle inspirer le choix de l'ordre des variables ?