Utbm mt42 **Examen final** **Automne 2007**

Nb : Les exercices 1 et 2 seront rédigés sur des feuilles séparées. On pourra par ailleurs admettre tout résultat intermédiaire afin de poursuivre la résolution d'un exercice.

Exercice 1 *Fonctions booléennes*

Nb: On change de feuille !

B désigne l'ensemble $\{0,1\}$ doté de sa structure naturelle d'algèbre de Boole $(B,+,.)$.

1.1 Sur des chemins balisés...

On considère la fonction f de trois variables booléennes définie par :

$$\begin{array}{rccll} f: & B^3 & \to & B & \\ & (x,y,z) & \mapsto & f(x,y,z) & = xy\bar{z}+\bar{x}\bar{y}\bar{z}+\bar{x}\bar{y}z+\bar{x}y\bar{z}+x\bar{y}\bar{z} \end{array}$$

a) Fournir une représentation dans l'espace qui fasse apparaître les points couverts par f.

b) Déterminer géométriquement les monômes premiers de f et prouver leur primalité.

c) Montrer directement, sans utiliser les théorèmes de cours, que f est égale à la somme de ses monômes premiers.

d) Appliquer la méthode de Quine et McCluskey pour simplifier l'expression de la fonction f.

1.2 mais hors des sentiers battus !

On dit que l'ensemble des opérations booléennes Op= {**et, ou, non**} [définies, pour des variables booléennes x et y, respectivement par $x.y$, $x+y$, et $\bar{x}$], est fonctionnellement complet car toute fonction booléenne peut être représentée par une expression utilisant ces seules opérations.

a) Montrer qu'il existe une partie propre de l'ensemble Op qui est aussi fonctionnellement complète.

b) *Existence d'une famille complète de cardinal* 1 ?

- Peut-on définir une opération booléenne **op** telle que {**op**} soit fonctionnellement complète?
- Si oui, définir **op** par une table de vérité à deux variables;
- démontrer que {**op**} est fonctionnellement complète.

Exercice 2 *Etude de complexité*

Nb: On change de feuille !

2.1 *Lemmes techniques*

Soit E un ensemble de cardinal n, entier naturel supérieur ou égal à 4; on note $|E|=n$.

On rappelle que, grâce au théorème d'inclusion-exclusion on sait dénombrer les partitions d'un ensemble fini de cardinal n en k classes, avec $(n,k)\in\mathbb{N}^2$ et $k\leq n$. Ce nombre $p(n,k)$ est donné par la formule:

$$(F): \qquad p(n,k)=\frac{1}{k!}\left[\sum_{r=0}^{k}(-1)^r C_k^r (k-r)^n\right],$$

où C_k^r désigne le nombre de combinaisons de r éléments parmi k. $(r\leq k)$.

.../...

a) Déterminer en fonction de n le nombre $p(n,3)$ des partitions de E en trois classes.

b) Sachant que toute relation d'équivalence sur E "faît naître" une partition sur E, et inversement, déterminer le nombre $eq(n,3)$ des relations d'équivalence à trois classes définies sur E; leur ensemble sera noté $R_{E,3}$.

c) *Applications numériques*

La valeur attribuée ici à n est valide seulement pour cette sous-question. On pose $n = 16$.

- Calculer $eq(n,3)$, puis $eq(n/2,3)$ et enfin $eq(n/4,3)$.
- Retrouver sans utiliser la formule (F), le nombre $eq(4,3)$ par une étude directe du nombre des partitions à trois classes sur E, avec E de cardinal 4.

2.2 On suppose avoir écrit un algorithme récursif $traitement\,(A \to res)$ défini comme suit.

****

$traitement\,(A \to res)$

1. En-tête
   (a) Entrées: A est un ensemble de relations d'équivalences à trois classes, partie de $R_{E,3}$, de cardinal $|A|$.
   (b) Sorties: $traitement\,(\ )$ produit un résultat res, non décrit ici.
2. *Corps d'algorithme*
   - selon $|A|$
     - $|A| \leq 4$:{exécution du module $traitement - final$ de temps d'exécution $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$}
     - $|A| > 4$:
       - { $traitement\,(A_1 \to res1)$ où A_1 désigne la "moitié" des éléments de A;
       - $traitement\,((A - A_1) \to res2)$, où $(A - A_1)$ désigne le reliquat }
   - fin de selon
3. *Fin de fonction traitement* ( )

****

a) On note $T(|A|)$ le temps d'exécution de $traitement\,(A \to res)$. Soit q un entier naturel. Montrer que $T(2^q)$ vérifie:

$$\begin{array}{llll} \text{Si} & q > 2 & \text{alors} & T(2^q) = 2 * T\left(2^{q-1}\right); \\ & & \text{sinon} & T(2^q) = \alpha; \\ \text{fin de si.} & & & \end{array}$$

b) *Expression générale de* $T(2^q)$

Déterminer l'expression explicite de $T(2^q)$ en fonction de α et q.

c) On admet que la fonction T est définie et croissante sur $\mathbb{N}$, c'est-à-dire que pour tout (N_1, N_2) de $\mathbb{N}^2$

$$[N_1 \leq N_2] \Rightarrow [T(N_1) \leq T(N_2)].$$

Fournir un encadrement de $T(N)$ en fonction du logarithme népérien de N et de α.

2.3 Déduire de l'étude précédente, qu'il existe une fonction f de n "simple", telle que le temps d'exécution de $traitement\,(R_{E,3})$ soit en $\Theta(f(n))$.