Nb : Les exercices 1 et 2 d'une part, 3 d'autre part, et enfin 4 seront rédigés sur des feuilles séparées.

Exercice 1 *Relations binaires*

Nb : On change de feuille !

On définit sur $\mathbb{R}^2$ la relation binaire R par :

$$\forall ((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \in \left(\mathbb{R}^2\right)^2 \quad [(\ (x_1, y_1) \, R \, (x_2, y_2) \ ) \Leftrightarrow (\ x_1 y_1 = x_2 y_2 \ )] \, .$$

1.1 Montrer que R est une relation d'équivalence.

1.2 Déterminer les classes d'équivalence $\overline{(0,0)}$ et $\overline{(1,1)}$.

Exercice 2 *Injectivité et surjectivité*

On considère la fonction g de $\mathbb{Q}^{+*}$ dans $\mathbb{Q}$ définie par :

$$\begin{array}{ll} \text{Si } x < 1 & g(x) = \frac{1}{x}; \\ \text{si } x \geq 1 & g(x) = x - 2. \end{array}$$

Etudier l'injectivité et la surjectivité de g.

Exercice 3 *Fonctions booléennes*

Nb : On change de feuille !

On note B l'algèbre de Boole $\{0, 1\}$ On considère la fonction f définie sur B^3 à valeurs dans B, donnée par les seuls triplets où elle prend la valeur 0; ainsi :

$$f^{-1}(\{0\}) = \{(0,0,1), (0,1,1), (1,1,0)\} \, .$$

3.1 Fournir les formes disjonctive et conjonctive de f.

3.2 *Etude des monômes premiers de f*

a) *Etude géométrique*

a1) Fournir une représentation dans l'espace qui fasse apparaître les points couverts par f.

a2) Grâce à cette représentation, déterminer les monômes inférieurs à f.

a3) Parmi les monômes trouvés dans la question a2) précédente, déterminer géométriquement ceux qui doivent être monômes premiers de f.

b) *Preuve analytique de primalité*

b1) Démontrer par les outils du cours, que les monômes trouvés sous a3) sont effectivement premiers pour f.

b2) Montrer que f est somme de ses monômes premiers.

.../...

Exercice 4 *Etude de complexité d'un algorithme récursif*

Nb : On change de feuille !

On considère un algorithme récursif *quicksort* (n) capable de trier des données de taille n, où n est élément de $\mathbb{N}^*$. On note $T(n)$ le nombre de comparaisons élémentaires nécessaires. L'analyse détaillée de l'algorithme *quicksort* ( ) a permis de montrer que :

$$\boxed{\begin{array}{c} T(0) = T(1) = 0; \qquad T(2) = 1 \\ \forall n \geq 2 \qquad T(n) = n - 1 + \frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n} [T(r-1) + T(n-r)] \end{array}}$$

4.1 Montrer que: $\forall n \geq 2 \quad T(n) = n - 1 + \frac{2}{n}\sum_{r=1}^{n-1} T(r)$.

4.2 On pose $v_1 = 0$ et si $n \geq 2$, $v_n = \sum_{r=1}^{n-1} T(r)$

a) Montrer que :

$$\forall n \geq 1 \quad T(n) = v_{n+1} - v_n \quad \text{et} \quad v_{n+1} - \frac{n+2}{n} v_n = n - 1.$$

b) Montrer que:

$$\forall n \geq 1 \quad \frac{v_{n+1}}{(n+1)(n+2)} - \frac{v_n}{n(n+1)} = \frac{3}{n+2} - \frac{2}{n+1}.$$

c) En déduire que :

$$\forall n \geq 3 \quad T(n) = -4n + 2(n+1)\left(\sum_{r=1}^{n} \frac{1}{r}\right).$$

4.3 *Lemmes techniques: le résultat final pourra être admis pour atteindre la conclusion de l'exercice.* Soit n quelconque de $\mathbb{N}^*$.

- Montrer que : $\frac{1}{n+1} \leq \int_n^{n+1} \frac{dx}{x} \leq \frac{1}{n}$;
- En déduire que : $\int_1^{n+1} \frac{dx}{x} \leq \left(\sum_{r=1}^{n} \frac{1}{r}\right) \leq \int_1^n \frac{dx}{x} + 1$;
- puis que : $\ln(n+1) \leq \left(\sum_{r=1}^{n} \frac{1}{r}\right) \leq \ln(n) + 1$;
- et enfin :

$$\left(\sum_{r=1}^{n} \frac{1}{r}\right) \in \Theta\left(\ln(n)\right).$$

4.5 En déduire la complexité du tri étudié. Analyser brièvement le résultat obtenu.