Utbm mt42 A13 **Examen final** **Durée 2h**

N.B: Les exercices 1 et 2 seront rédigés sur la même feuille, l'exercice 3 sur une feuille différente.

Exercice 1 *Relations binaires*

N.B: On change de feuille.

On définit sur $\mathbb{R}$ la relation binaire R par:

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad [xR_1y] \Leftrightarrow \left[x^3 - y^3 = 3\,(x - y)\right]$$

1.1 Montrer que R est une relation d'équivalence.

1.2 Déterminer pour tout x de $\mathbb{R}$, la classe d'équivalence de x, notée $\overline{x}$.

1.3 *Etude de cas particuliers*

Déterminer $\overline{0}$, $\overline{2}$ et $\overline{3}$.

N.B: Cette sous-question peut être traitée indépendamment de 1.2.

Exercice 2 *Etude de bijectivité d'une fonction*

On considère la fonction g de $\mathbb{Q}^{+*}$ dans $\mathbb{Q}$ définie par :

$$g(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x} \text{ si } x < 1 \\ x - 2 \text{ si } x \geq 1. \end{cases}$$

2.1 Etudier l'injectivité de g.

2.2 Etudier la surjectivité de g.

2.3 Si g est bijective, déterminer sa réciproque g^{-1}.

Exercice 3 *Comparaison de deux algorithmes*

N.B: On change de feuille.

3.1 *Notations et généralités*

On se propose de comparer les performances temporelles de deux algorithmes de calcul du produit de fonctions polynômes exprimées en base canonique, à coefficients réels. n désigne un élément de $\mathbf{N}^*$.

Les algorithmes étudiés sont notés $al1(2n, p_1, p_2 \rightarrow prod1)$ [respectivement $al2(2n, p_1, p_2 \rightarrow prod2)$] et leur temps d'exécution $T_1(2n)$ [respectivement $T_2(2n)$], sachant que les fonctions polynômes p_1, p_2, dont on cherche le produit, sont de degré strictement inférieur à $2n$.

Montrer que p_1 et p_2 peuvent être représentés par des vecteurs de $2n$ nombres réels.

3.2 *Etude de* $al1(2n, p_1, p_2 \rightarrow prod1)$

$al1()$ correspond au calcul le plus "naïf" du produit des polynômes p_1 et p_2.

Montrer, sans détails inutiles, que: $T_1(2n) \in \Theta(n^2)$.

3.3 *Desciption de* $al2(2n, p_1, p_2 \to prod2)$

On propose une variante de $al1()$, définie comme suit.

a) *Principe de la méthode*

a1) *Nouvelle écriture des fonctions polynômes*

On écrit $p_1(x)$ sous la forme $p_1(x) = p_{1,1}(x)x^n + p_{1,2}(x)$, avec $p_{1,1}$ et $p_{1,2}$ tous deux de degrés strictement inférieurs à n ; on fait de même pour $p_2(x) = p_{2,1}(x)x^n + p_{2,2}(x)$.

Fournir un exemple de la nouvelle écriture d'un $p_1(x)$ pour $n = 3$.

a2) *Calcul du produit*

On calcule $prod2(x)$ comme suit

$$prod2(x) = [p_{1,1}(x)p_{2,1}(x)]\, x^{2n} + [p_{1,1}(x)p_{2,2}(x) + p_{2,1}(x)p_{1,2}(x)]\, x^n + [p_{1,2}(x)p_{2,2}(x)]$$

b) *Evaluation du temps d'exécution de* $al2()$

On admettra le résultat suivant:

L'analyse fine de l'algorithme décrit ci-dessus montre, en supposant $T_2(1)$ donné, permet de prouver que $T_2(2n)$ vérifie, pour tout n de $\mathbf{N}^*$, la relation :

$$T_2(2n) = 3T_2(n) + an + b \quad \text{avec } (a, b) \in \left(\mathbf{R}^{+*}\right)^2 \qquad (\mathcal{R})$$

3.4 *L'objet de cette question est d'expliciter l'écriture de* $T_2(2n)$

a) On pose $n = 2^k$ et $X_k = T_2\left(2^k\right)$

Traduire la relation $(\mathcal{R})$ en termes de X_k, en fonction de a, b, k.

On se propose de déterminer l'ensemble des suites numériques (u_k) vérifiant :

$$\forall k \in \mathbf{N} \quad u_{k+1} - 3u_k = a2^k + b, \quad \text{avec } (a, b) \in \left(\mathbf{R}^{+*}\right)^2 \text{ donné} \qquad (\mathcal{L})$$

a1) Montrer qu'on peu trouver une suite $\left(u_k^{(p)}\right)$ solution particulière de $(\mathcal{L})$.

Indication: On cherchera $\left(u_k^{(p)}\right)$ donnée par $\forall k \in \mathbf{N} \quad u_k^{(p)} = \lambda 2^k + \mu$, et on déterminera λ et μ en fonction de a et b.

a2) On considère l'ensemble des suites numériques (v_k) vérifiant :

$$\forall k \in \mathbf{N} \quad v_{k+1} - 3v_k = 0 \qquad (\mathcal{H})$$

- Quelle est leur nature? Déterminer leur ensemble.
- Montrer que toute suite solution de $(\mathcal{L})$ est somme d'une solution particulière de $(\mathcal{L})$ et d'une solution quelconque de $(\mathcal{H})$.

b) En déduire que,pour tout n de $\mathbf{N}^*$ de la forme $n = 2^k$ on a :

$$T_2(n) = \alpha n^{\log_2(3)} - \beta n - \gamma \quad \text{avec } (\alpha, \beta, \gamma) \in \left(\mathbf{R}^{+*}\right)^3 \text{ connus}$$

3.5 *Complexité de* $al2()$

En déduire la complexité de $al2()$. Conclusion ?