Final MT42

Exercice 1 : Logique

[On change de copie, svp]

Soit la liste suivante d'énoncés :

(E1) Les hauts fonctionnaires ne pratiquent pas le népotisme.

(E2) Le népotisme n'existe pas.

(E3) Si nous vivons dans une société contemporaine alors le népotisme existe.

(E4) Dans une société démocratique il y a des hauts fonctionnaires.

(E5) Nous vivons dans une société démocratique.

1. Utilisez le langage propositionnel pour traduire les énoncés de ce raisonnement en formules propositionnelles.
2. Est-ce que l'ensemble des formules déterminées précédemment est satisfiable ?
3. Est-ce que l'énoncé (E5) peut se déduire des 4 énoncés (E1), (E2), (E3) et (E4) ?

Exercice 2 : Étude de complexité

[On change de copie, svp]

On considère deux algorithmes $algo1\,(n \to res)$ et $algo2\,(n \to res)$ résolvant le même problème et fournissant le même résultat res lorsqu'ils travaillent sur des données de taille n. On suppose savoir par les publications des inventeurs de ces méthodes que les temps de traitement d'une donnée de taille n, notés respectivement $T_1(n)$, $T_2(n)$, vérifient $T_1(n) \in \Theta(n)$ et $T_2(n) \in \Theta(n\ln(n))$. On suppose enfin pour les deux algorithmes concernés, que: $T_1(100) = 0,87u$ et $T_2(100) = u$, où u désigne l'unité temporelle qui sera utilisée pour l'expression de toutes les durées ultérieures.

1. On considère deux entiers naturels "grands", notés n et n' avec $n' \geq n$.
   (a) Pour i élément de $\{1, 2\}$, fournir l'expression de $T_i(n')/T_i(n)$ en fonction de n et n' seulement.
   (b) Interpréter les résultats obtenus en termes d'évolution des temps de calcul sous les deux algorithmes considérés.
   (c) *Application numérique:*
   Fournir $T_1(n')$ et $T_2(n')$ pour $n' = 10^4$.
2. On suppose qu'une série de tests expérimentaux des deux algorithmes considérés ont permis d'établir que, pour un entier naturel n "grand", on a:
$$T_1(n) \simeq D_1(n) \text{ et } T_2(n) \simeq D_2(n) \text{ avec } D_1(n) = 4n \text{ et } D_2(n) = n\ln(n).$$
   (a) *Outils techniques*
   On définit sur $[1, +\infty[$ la fonction numérique E par: $E(x) = D_1(x) - D_2(x)$.
   - Montrer que E est dérivable sur $[1, +\infty[$.
   - Résoudre dans $[1, +\infty[$ l'inéquation $(I) : E'(x) \leq 0$.
   - Fournir le tableau des variations de E sur $[1, +\infty[$.
   - Fournir une allure de la courbe représentative de E dans un repère du plan.
   - En déduire l'existence d'un réel unique x_0 tel que $E(x_0) = 0$. Fournir une valeur approchée de x_0 numériquement, à l'unité près.

   (b) Interpréter les résultats de la question précédente en termes informatiques.
   (c) Vous imaginez être responsables dans une entreprise du service qui assure le développement des outils logiciels et leur documentation, dont les traductions de $algo1$ et $algo2$.
   Décrire brièvement le plan de la documentation que vous mettrez à disposition des utilisateurs lorsqu'ils appelleront $algo1$ ou $algo2$.

Exercice 3 : Fonctions booléennes et hypercube

[On change de copie, svp]

A) Résultats préliminaires (pour s'échauffer)

La Figure 1 donnée en annexe représente les algèbres de Boole $\mathbb{B}^1$, $\mathbb{B}^2$ et $\mathbb{B}^3$ où $\mathbb{B} = \{0, 1\}$. Pour des raisons géométriques évidentes nous appellerons aussi de tels ensembles 1-cube, 2-cube et 3-cube : un n-cube étant un cube de dimension n. On peut également définir un 0-cube comme un point.

1. Combien de 0-cubes sont contenus dans $\mathbb{B}^1$, combien de 1-cubes sont contenus dans $\mathbb{B}^2$ (c'est-à-dire combien de côtés contient un carré) et combien de 2-cubes sont contenus dans $\mathbb{B}^3$ (c'est-à-dire combien de faces sont contenues dans le cube) ?
2. Conjecturer le nombre de $(n-1)$-cubes contenus dans $\mathbb{B}^n$ (vous démontrerez ce résultat à la fin du devoir).

B) Étude d'une fonction booléenne sur $\mathbb{B}^3$.

On note $\mathbb{B} = \{0, 1\}$ et on considère $f_1 : \mathbb{B}^3 \to \mathbb{B}$ définie par $f_1(x, y, z) = x.y + x.\overline{y}.\overline{z} + \overline{x}.\overline{z}$

1. Représenter $\mathbb{B}^3$ et repérer les faces couvertes par f_1.
2. En déduire les monômes inférieurs à f_1 qu'on listera par degré.
3. Déterminer géométriquement les monômes premiers de f_1.
4. Proposer une forme réduite de f_1 à partir des monômes premiers.

C) L'hypercube $\mathbb{B}^4$.

On considère dans cette partie l'algèbre de Boole $\mathbb{B}^4$, qui géométriquement correspond à un 4-cube aussi appelé un hypercube. Une représentation de cette algèbre de Boole est donnée en annexe (Figure 2). Comme on ne peut pas représenter fidélement les objets 4-dimensionnels, les 3-cubes contenus dans $\mathbb{B}^4$ sont déformés. Ainsi, par exemple, la Figure 3 représente un des 3-cubes contenus dans $\mathbb{B}^4$.

1. Compter «à la main» le nombre de 3-cubes (c'est-à-dire de cubes) contenus dans $\mathbb{B}^4$. Est-ce cohérent avec votre conjecture formulée en A.2 ?
2. On note x, y, z, t les variables booléennes définies sur $\mathbb{B}^4$ et $\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}, \overline{t}$ les variables conjuguées.
   (a) Quelle est la face de l'hypercube couverte par la fonction $f_2(x, y, z, t) = y$?
   (b) Quelle est la dimension des faces correspondant aux monômes de degré 1 ?
   (c) En déduire une façon de compter le nombre de 3-cubes de $\mathbb{B}^4$.
   (d) Prouver que le nombre de $(n-1)$-cubes de $\mathbb{B}^n$ est $2n$.
3. On s'intéresse au nombre de 2-cubes (c'est-à-dire de faces) contenus dans $\mathbb{B}^4$.
   (a) Quelle est la dimension des faces couvertes par les monômes de degré 2, par exemple $y.\overline{z}$?
   (b) Combien de monômes de degré 2 peut-on former à partir des variables $x, y, z, t, \overline{x}, \overline{y}, \overline{z}, \overline{t}$ (indication: on n'oubliera pas que les monômes $x.\overline{x}$, $y.\overline{y}, \ldots, t.\overline{t}$ sont nuls)
   (c) En déduire le nombre de 2-cubes contenus dans $\mathbb{B}^4$.
   (d) Prouver par la même méthode que le nombre de $(n-2)$-cubes contenus dans un n-cube est
   $$2n^2 - 2n \tag{1}$$
4. Comment calculeriez-vous les 1-cubes de $\mathbb{B}^4$?

D) **[hors-barème]** Proposer une formule générale qui donne les k-cubes de $\mathbb{B}^n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \leq n$.

Annexe

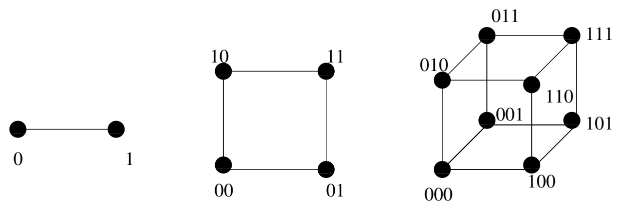

Figure 1: Représentation des cubes de dimensions 1, 2 et 3 : $\mathbb{B}^1$, $\mathbb{B}^2$ et $\mathbb{B}^3$

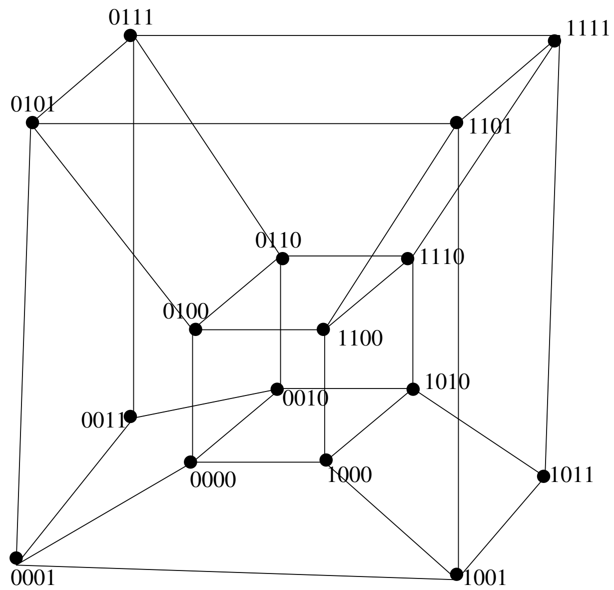

Figure 2: Représentation de l'hypercube $\mathbb{B}^4$

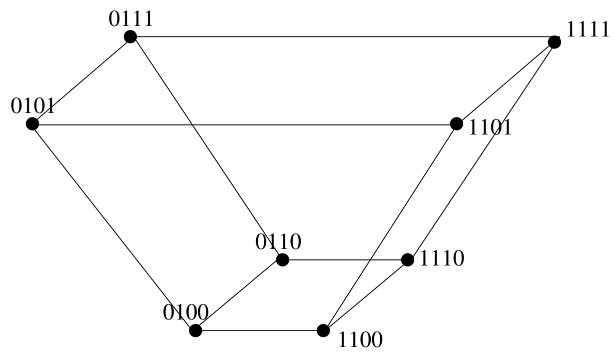

Figure 3: Représentation d'une "face", i.e. d'un cube de l'hypercube $\mathbb{B}^4$

Nb: on pourra découvrir après l'examen une représentation alternative — représentation en patron – de l'hypercube dans le tablean de Salvador Dali "Corpus Hypercubus" au Metropolitan Museum of Art (New-York) `http://www.metmuseum.org/collection/the-collection-online/search/488880`.