Final MT42

Exercice 1 : Logique

[On change de copie, svp]

A) Soient les phrases suivantes :

(P1) Si Lana Del Rey n'a pas décidé de devenir chanteuse en écoutant Kurt Cobain, alors, si Jay Kay collectionne les voitures alors Sting n'a pas bien fait de quitter Police.

(P2) Si Lana Del Rey a décidé de devenir chanteuse en écoutant Kurt Cobain, alors Sting n'a pas bien fait de quitter Police.

(P3) Matthew Bellamy s'est inspiré de Prince pour la chanson *Supermassive Black Hole* et Jay Kay collectionne les voitures.

(P4) Si Matthew Bellamy s'est inspiré de Prince pour la chanson *Supermassive Black Hole*, alors Lana Del Rey n'a pas décidé de devenir chanteuse en écoutant Kurt Cobain.

(P5) Si Sting a bien fait de quitter Police, alors Led Zeppelin n'est pas le plus grand groupe de rock de tous les temps.

1. Traduire ces énoncés dans la logique des propositions, en précisant le vocabulaire utilisé.
2. Transformer les formules en clauses de Horn.
3. En appliquant la méthode de résolution, peut-on démontrer que Sting n'a pas bien fait de quitter Police ?
4. En appliquant la méthode de résolution, peut-on démontrer que Led Zeppelin est le plus grand groupe de rock de tous les temps ?

B) Après avoir défini votre vocabulaire, traduisez les phrases suivantes dans la logique des prédicats du premier ordre :

- Certains entiers ont pour carré la somme des carrés de deux autres entiers.
- Aucun entier n'est plus grand que tous les autres.

C) Qu'est-ce qu'une tautologie en formule des prédicats du premier ordre ? Est-ce que la formule $\exists p\ \exists q\ \exists r\ ((p \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow (q \wedge p))$ est une tautologie, en supposant que le domaine de valeurs des variables p, q et r est $D = \{a, b\}$? Justifiez votre réponse.

Exercice 2 : Étude de complexité

[On change de copie, svp]

On considère dans cet exercice le problème de recherche d'un maximum dans une liste de n nombres entiers.

1. Écrire un algorithme naïf qui étant donné une liste L en entrée $L = [t_1, \ldots, t_n]$ retourne le plus grand élément.

2. Étudier la complexité de votre algorithme.

3. On propose la version itérative de la recherche du maximum qui prend en entrée la liste L et le nombre d'éléments n:

Algorithme 1. Maximun(L,n)
if $n = 1$ **then**
  return(t_1)
else Max(Maximum($[t_1, \ldots, t_{\llcorner n/2 \lrcorner}]$, $\llcorner n/2 \lrcorner$), Maximum($[t_{\ulcorner n/2 \urcorner}, \ldots, t_n]$, $\ulcorner n/2 \urcorner$)
end if

avec les notations suivantes:

- Max: retourne le maximum de deux entiers,
- $\llcorner x \lrcorner$ correspond à la partie entière d'un réel x,
- $\ulcorner x \urcorner$ correspond à la partie entière supérieure d'un réel x, c'est-à-dire $\ulcorner x \urcorner = \llcorner x \lrcorner + 1$.

(a) Justifier que cet algorithme retourne bien le maximum de L.

(b) Illustrer les différentes étapes de l'algorithme sous forme d'un arbre en cherchant le maximum de $L = [10, 12, 8, 13, 7, 9]$.

(c) Quel est la profondeur de l'arbre si $n = 2^k$? Est-ce que la profondeur de l'arbre est suffisante pour estimer la complexité de l'algorithme ?

(d) On note $T(n)$ le nombre d'appel à la fonction Max lorsqu'on execute Maximum(L,n). On supposera que $n = 2^k$.

i. Établir une relation de récurrence entre $T(n)$ et $T(n/2)$.

ii. On considère la suite récurrente suivante:

$$\begin{cases} u_1 = 0 \\ u_{k+1} = 2u_k + 1 \end{cases}.$$

Déterminer la valeur de u_k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

iii. La recherche du maximum par l'algorithme itératif est-elle meilleure que votre algorithme naïf ?

(e) Justifier qu'un algorithme de recherche de maximum sur une liste quelconque de n éléments doit au moins faire $n - 1$ comparaisons. En déduire une borne inférieur sur la classe de complexité de tels algorithmes.

Exercice 3: Fonctions booléennes

A) Étude d'une fonction booléenne sur $\mathbb{B}^3$.

On note $\mathbb{B} = \{0, 1\}$ et on considère $f : \mathbb{B}^3 \to \mathbb{B}$ définie par $f(x, y, z) = \overline{x}.y + x.y.\overline{z} + x.z + y.\overline{z}$

1. Représenter $\mathbb{B}^3$ et repérer les faces couvertes par f.
2. En déduire les monômes inférieurs à f qu'on listera par degré.
3. Déterminer géométriquement les monômes premiers de f.
4. Proposer une forme réduite de f à partir des monômes premiers et vérifier que cette forme réduite est bien équivalente à f.

B) Étude d'un système d'équations boolénnes sur $\mathbb{B}^n$. On se place maintenant sur l'ensemble $\mathcal{E}_n$ des fonctions booléennes sur $\mathbb{B}^n$, c'est-à-dire $\mathcal{E}_n = \{f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}\}$ et on cherche une méthode de résolution pour un système d'équations du type

$$\begin{cases} f_1(x_1, \ldots, x_n) = g_1(x_1, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, \ldots, x_n) = g_m(x_1, \ldots, x_n) \end{cases} \tag{1}$$

où $f_1, \ldots, f_m, g_1, \ldots, g_m$ sont des éléments de $\mathcal{E}_n$.

1. Mise en place de la méthode.

(a) Montrer que pour tout $f, g \in \mathcal{E}_n$ on a $f = g \Leftrightarrow f.g + \overline{f}.\overline{g} = 1$.

(b) Montrer que résoudre un système

$$\begin{cases} h_1(x_1, \ldots, x_n) = 1 \\ \vdots \\ h_m(x_1, \ldots, x_n) = 1 \end{cases} \tag{2}$$

équivaut à trouver les faces couvertes par $h = h_1.h_2 \ldots .h_n$.

2. Application. On considère le système suivant d'équations booléenes sur $\mathbb{B}^4$ où les variables booléennes sont notées x, y, z, w:

$$(S) \begin{cases} x + z + \overline{w} = \overline{y} \\ \overline{x} + y + w = \overline{z} \end{cases} \tag{3}$$

(a) Transformer (S) en un système de la forme

$$(S')\left\{\begin{array}{l} h_1(x,y,z,w)=1 \\ h_2(x,y,z,w)=1 \end{array}\right. \tag{4}$$

(b) Déterminer la fonction booléenne $h = h_1.h_2$.

(c) Écrire h sous forme disjonctive en simplifiant son écriture à l'aide des règles du calcul booléen.

(d) Quelles sont les solutions de (S) ?

C) Application: un problème de couverture réseau.

On considère deux ensembles $\mathcal{U} = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$ et $\mathcal{S} = \{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5\}$. L'ensemble $\mathcal{U}$ représente des utilisateurs de téléphones mobiles et l'ensemble $\mathcal{S}$ représente un ensemble d'antennes relais. Les deux ensembles sont liés par une relation $\mathcal{R}$: on dit que $e_i\mathcal{R}s_j$ si et seulement si l'utilisateur e_i est couvert par l'antenne s_j. Voici une description de la relation $\mathcal{R}$:

$\mathcal{R} = \{(e_1, s_1), (e_1, s_2), (e_2, s_3), (e_2, s_5), (e_3, s_2), (e_3, s_3), (e_3, s_5), (e_4, s_3), (e_4, s_4), (e_5, s_1), (e_5, s_5), (e_6, s_3), (e_6, s_5)\}$

1. Donner une représentation graphique de $\mathcal{R}$.
2. Pouvez-vous déterminer à l'aide de votre représentation un sous ensemble de $\mathcal{S}$ qui couvre tous les utilisateurs (c'est-à-dire un sous ensemble $S' \subset \mathcal{S}$ tel que tout éléments de $\mathcal{U}$ est en relation avec au moins un élément de $\mathcal{S}$) ?

   On associe à chaque antenne s_i une variable boolénne qui indique si l'antenne s_i est utilisée. Par exemple $x_1 = 1$ signifie que s_1 est active alors que $x_3 = 0$ signifie que s_3 n'est pas active.
3. Quel système (simple) d'équations booléennes correspond à l'activation de toutes les antennes ?
4. On cherche maintenant à activer le minimum d'antennes tout en garantissant la couverture de tous les utilisateurs.
   (a) Pour chaque utilisateur $e_1, \ldots, e_6$, déterminer une équation booléenne qui traduise tous les cas de couverture possible. Par exemple d'après la définition de $\mathcal{R}$ la couverture de e_1 est assurée ssi $x_1 + x_2 = 1$.
   (b) Réduire le système à une équation dont on simplifiera l'écriture à l'aide des règles du calcul booléen.
   (c) En déduire une ou des solutions optimisées du problème de couverture du réseau.
   (d) Vérifier que les solutions obtenues sont minimale au sens où si on désactive une antenne de la solution la couverture n'est plus assurée.