Utbm mt42 Examen médian Automne 2006

Nb : Les exercices 1 et 2 seront rédigés sur des feuilles séparées. Par ailleurs, on pourra admettre tout résultat intermédiaire afin de poursuivre la résolution d'un exercice.

Exercice 1 *Equivalence logique*

1.1 *Première partie*

Nous rappelons que deux formules F_1 et F_2 sont logiquement équivalentes (ce qui est noté $F_1 \equiv F_2$) lorsqu'elles sont satisfaites par les mêmes valuations.

Etant donnée la formule $p \to (q \vee r)$, indiquer lesquelles des formules suivantes lui sont logiquement équivalentes :

- $q \vee (\neg p \vee r)$
- $(q \wedge \neg r) \to p$
- $(p \wedge \neg r) \to q$
- $(\neg q \wedge \neg r) \to \neg p$

Expliquer la méthode utilisée pour décider des équivalences logiques précédentes.

1.2 *Deuxième partie*

a) *Rappels*

Nous rappelons qu'une formule F est conséquence logique des formules $F_1,\ F_2,\ \ldots,\ F_n$ ce qui est noté

$$F_1,\ F_2,\ \ldots,\ F_n \models F,$$

lorsque toute valuation qui satisfait $F_1,\ F_2,\ \ldots,\ F_n$ satisfait aussi F.

Nous savons aussi que, quelles que soient les formules F_1, F_2 et F, on a :

$$F_1, F_2 \models F \quad \text{si et seulement si} \quad \models (F_1 \wedge F_2 \to F)\,,$$

où $\models Q$ signifie que la formule Q est valide.

b) Utiliser l'équivalence logique pour montrer qu'on a aussi :

$$F_1, F_2 \models F \quad \text{si et seulement si} \quad \models (F_1 \to (F_2 \to F))\,.$$

.../...

Exercice 2 *Induction*

Nb: On change de feuille !

2.1 On considère le réseau $\mathcal{R}$ de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ défini par :

$$\mathcal{R} = \{(3x, 2y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \quad / \quad (x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}\}.$$

Proposer une rapide représentation graphique de $\mathcal{R}$ dans un repère orthonormé du plan.

2.2 *Etude d'un schéma d'induction*

On définit la partie $\mathcal{M}$ de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ par le schéma d'induction $(\mathcal{S})$ suivant :

- Base : $(0, 0) \in \mathcal{M}$.
- Règles :
  - (R_1) : $\quad \forall (m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \quad [((m, n) \in \mathcal{M}) \Rightarrow ((m + 3, n) \in \mathcal{M})]$;
  - (R_2) : $\quad \forall (m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \quad [((m, n) \in \mathcal{M}) \Rightarrow ((m, n + 2) \in \mathcal{M})]$.

a) Fournir deux arbres de dérivation distincts du couple $(9, 6)$. Que dire du schéma proposé ?

b) Montrer que $\mathcal{M} \subset \mathcal{R}$. Que dire du schéma $(\mathcal{S})$?

c) Montrer que $\mathcal{R} \subset \mathcal{M}$. Que dire du schéma $(\mathcal{S})$?

2.3 *Définition de fonctions par induction*

Sur $\mathcal{M}$, donc $\mathcal{R}$, on définit inductivement f par :

- $f[(0, 0)] = 1$.
- Si (m, n) est élément de $\mathcal{M}$ alors

$$\begin{aligned} f[(m + 3, n)] &= 8f[(m, n)]; \\ f[(m, n + 2)] &= 25f[(m, n)]. \end{aligned}$$

a) *Propriétés de f*

- En raison de la question 2.2 a), montrer qu'il n'est pas évident du tout que f soit une fonction.
- En utilisant les deux arbres de dérivation fournis sous la question précitée, évaluer $f[(9, 6)]$ de deux manières. Conclusion ?
- Quelle méthode choisir pour établir que f est une fonction de $\mathcal{R}$ dans $\mathbb{N}$?

b) *f est une fonction...*

- Conjecturer l'expression de $f[(m, n)]$ pour (m, n) dans $\mathcal{R}$.
- Prouver que $f[(m, n)]$ a bien la forme annoncée pour tout (m, n) de $\mathcal{R}$.
- Conclusion ?

c) Définir inductivement un autre objet g sur $\mathcal{R}$ qui ne soit pas une fonction de $\mathcal{R}$ dans $\mathbb{N}$.

d) Combien existe-t-il d'arbres de dérivations distincts pour atteindre le couple $(3x, 2y)$ par le schéma $(\mathcal{S})$, sachant que (x, y) est dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$?