Utbm mt42 **Examen médian** **Automne 2011**

Nb : Les exercices 1 et 2 seront rédigés sur des feuilles séparées. On pourra admettre tout résultat intermédiaire afin de poursuivre la résolution d'un exercice.

Exercice 1 *Induction: étude des trajectoires dans un repère*

Nb: On change de feuille, svp !

On se donne deux entiers naturels n_0 et m_0. On considère alors l'ensemble P défini par:

$$P = \{(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \ / \ n \leq n_0, m \leq m_0\}.$$

Cet ensemble P peut être représenté dans un repère orthonormé du plan, comme le montre la figure 1, pour $n_0 = 11$ et $m_0 = 8$.

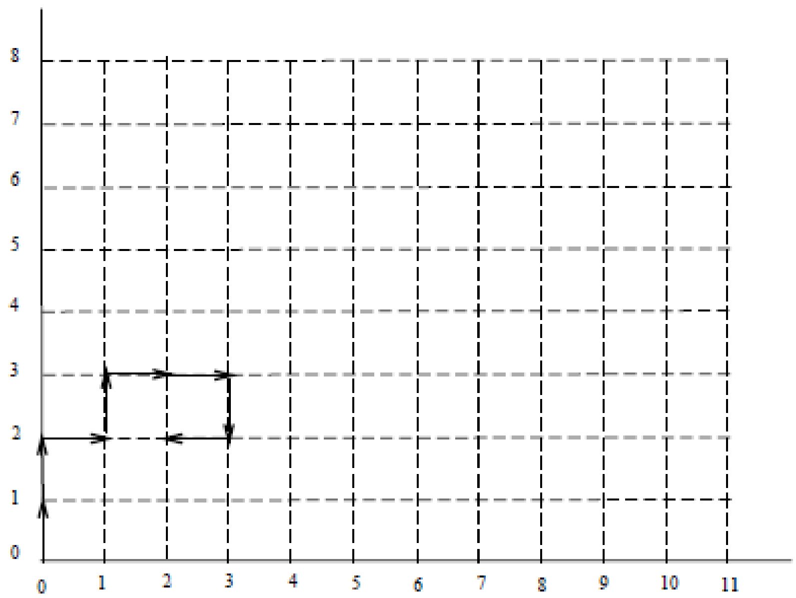

Figure 1 : Trajectoires dans un repère

On considère maintenant l'alphabet $T = \{g, d, h, b\}$. Certains mots de T^* représentent des trajectoires dans le repère, ayant pour origine le point de coordonnées $(0, 0)$. En effet nous considérons que g [respectivement d, h, b] représente un déplacement d'une unité à gauche [respectivement à droite, vers le haut, vers le bas]. Ainsi le mot *hhdhddbg* représente la trajectoire de la figure 1.

Toute trajectoire possède un point de destination; ainsi la trajectoire *hhdhddbg* de la figure 1 admet le point de coordonnées $(2, 2)$ comme point de destination.

On note $\Theta \subset T^*$ l'ensemble des mots (ou trajectoires) dont la destination de coordonnées (n, m) vérifie $n \leq n_0$ et $m \leq m_0$, c'est-à-dire reste à l'intérieur du rectangle.

.../...

1.1 Proposer un schéma d'induction qui produit Θ.

Suggestion: les règles du schéma d'induction pourront être conditionnelles.

1.2 Basé sur la définition inductive de Θ, définir la fonction $d : \Theta \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ qui donne pour une trajectoire de Θ, son point de destination.

Suggestion: on pourra en fait proposer deux fonctions $xd : \Theta \to \mathbb{N}$ et $yd : \Theta \to \mathbb{N}$ *qui donnent respectivement l'abscisse et l'ordonnée du point de destination.*

1.3 *Longueurs de trajectoires*

On définit la longueur d'une trajectoire comme la longueur du mot de Θ qui la représente. Pour un même point de destination, plusieurs trajectoires sont en général possibles; certaines de ces trajectoires ont une longueur minimale.

a) Déterminer la longueur minimale de trajectoire pour un point de destination de coordonnées (n, m).

b) En vous basant sur le résultat précédent, prouver par induction structurelle que la longueur minimale $\min(t)$ associée au point de destination d'une trajectoire $t \in \Theta$ est donnée par:

$$\min(t) = \left[|t|_d + |t|_h\right] - \left[|t|_g + |t|_b\right],$$

où $|m|_a$, avec $a \in \{g, d, h, b\}$, représente le nombre de caractères a qui font partie du mot m.

c) Proposer une définition inductive de la fonction $r : \Theta \to \Theta$ qui donne, pour une trajectoire t de Θ, l'une des trajectoires de longueur minimale de même point de destination que t.

Suggestion: pour définir r on pourra introduire des fonctions auxiliaires qui opèrent sur les mots.

Exercice 2 *Ensembles et relations*

Nb: On change de feuille, svp !

2.1 On considère un ensemble fini $E = \{e_1, ..., e_n\}$ et une relation binaire R sur E, de matrice booléenne associée $R = (r_{ij})$ avec, sous notation française:

$$[(e_j, e_i) \in R] \Leftrightarrow [r_{ij} = 1].$$

On dit que la suite $(e_{i_1}, e_{i_2}, ..., e_{i_k})$ de k éléments de E ($k \geq 2$) est un chemin de E sous R si et seulement si, pour tout entier s vérifiant $1 \leq s \leq k-1$, on a : $\left(e_{i_s}, e_{i_{s+1}}\right) \in R$. Un tel chemin est alors dit de longueur $k-1$; on dit qu'il conduit de e_{i_1} à e_{i_k}.

Tout au long de la question 2.1, on traitera les questions de façon générale, relativement à E et R; lorsqu'on traitera une application, on utilisera les données E_0 et R_0 suivantes:

$$E_0 = \{e_1, ..., e_4\} \text{ et } R_0 = \{(e_1, e_2), (e_3, e_4), (e_3, e_1), (e_4, e_3), (e_2, e_3)\}.$$

a) *Chemins de longueur* 1

a1) Quels sont les chemins de longueur 1 de E sous la relation R ?

a2) *Application*

- Fournir l'ensemble des chemins de longueur 1 de E_0 sous R_0.
- Fournir la matrice booléenne associée à R_0.

.../...

b) *Chemins de longueur* p sous R

b1) *Etude générale*

Démontrer par récurrence sur p de $\mathbb{N}^*$ la propriété $P(p)$ suivante:

$$P(p) : \left\{ \begin{array}{l} \text{Il existe un chemin de longueur } p \text{ sous } R \text{ menant de } e_i \text{ à } e_j \\ \text{si et seulement si} \\ a_{ji} = 1 \end{array} \right.$$

sachant que $R^p = (a_{ij})$, c'est-à-dire que (a_{ij}) désigne la puissance $p^{ième}$ de la matrice booléenne R de la relation R étudiée.

b2) *Application*

- Déterminer l'ensemble des chemins de longueur 2 sous R_0.
- Déterminer l'ensemble des chemins de longueur 3 sous R_0.
- Existe-t-il des chemins de longueur 4 sous R_0 ? Confirmer le résultat graphiquement.

c) Comment caractériser le fait qu'il existe des chemins de longueur infinie sous une relation R ?

2.2 On considère un algorithme constitué d'une suite finie de sous-modules éléments d'un ensemble fini de sous-modules $\{m_1, ..., m_n\}$.

On définit une relation R sur l'ensemble des sous-modules de l'algorithme considéré comme suit. On dit que $(m_i, m_j) \in R$ si et seulement si dans l'algorithme considéré, le sous-module m_j est exécuté immédiatement après le sous-module m_i.

Utiliser la théorie développée dans la question 2.1 pour détecter d'éventuelles boucles infinies dans le cas d'algorithmes complexes.