Utbm mt42 **Examen médian** **Automne 2012**

Nb : Les exercices 1 et 2 seront rédigés sur des feuilles séparées. On pourra admettre tout résultat intermédiaire afin de poursuivre la résolution d'un exercice.

On rappelle la définition de la somme des couples de $\mathbb{R}^2$ pour l'ensemble de deux sujets proposés:

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2 \quad \forall (a', b') \in \mathbb{R}^2 \quad (a, b) + (a', b') = (a + a', b + b')\,.$$

Exercice 1 *Induction*

N.B On change de feuille !

1.1 *Ensemble $\mathcal{M}$ défini par induction*

On définit l'ensemble $\mathcal{M}$, partie de $\mathbb{N}^2$, par le schéma d'induction ($\mathcal{S}$) suivant:

- Base: $(0, 0) \in \mathcal{M}$.
- Règle:
  $\forall (m_1, m_2) \in \mathbb{N}^2 \quad [\{(m_1, m_2) \in \mathcal{M}\} \Rightarrow \{((m_1, m_2) + (2, 0) \in \mathcal{M}) \text{ et } ((m_1, m_2) + (0, 2) \in \mathcal{M})\}]\,.$

a) Proposer un arbre de dérivation pour le couple $(4, 6)$. Cet arbre est-il unique ? Mêmes questions pour le couple $(2, 8)$.

b) Démontrer que $\mathcal{M} \subset\mathbb{N}^2$. En déduire que le schéma d'induction ($\mathcal{S}$) est consistant pour $\mathbb{N}^2$.

c) Etudier la complétude du schéma ($\mathcal{S}$) pour $\mathbb{N}^2$.

d) Le schéma d'induction ($\mathcal{S}$) peut-il permettre de construire $\mathbb{N}^2$? Pourquoi ?

1.2 *Fonctions définies par induction sur $\mathcal{M}$*

Sur $\mathcal{M}$ on définit par induction les fonctions x et y comme suit:

$$x\,[(0, 0)] = y\,[(0, 0)] = 0;$$
$$\forall (m_1, m_2) \in \mathcal{M} \quad x\,[(m_1, m_2) + (2, 0)] = x\,[(m_1, m_2)] + 1; \quad x\,[(m_1, m_2) + (0, 2)] = x\,[(m_1, m_2)]\,;$$
$$\forall (m_1, m_2) \in \mathcal{M} \quad y\,[(m_1, m_2) + (2, 0)] = y\,[(m_1, m_2)]\,; \quad y\,[(m_1, m_2) + (0, 2)] = y\,[(m_1, m_2)] + 1.$$

a) Déterminer $x\,[(4, 6)]$ et $y\,[(2, 8)]$ en utilisant les arbres de dérivations proposés sous la question 2.1 a).

b) Est-on a priori certain que la définition de $x\,[(4, 6)]$ et de $y\,[(2, 8)]$ est indépendante de l'arbre de dérivation choisi ? Si ces définitions dépendent de l'arbre de dérivation x et y sont-elles des fonctions de $\mathcal{M}$ dans $\mathbb{N}$?

c) Proposer une définition non inductive de $x\,[(m_1, m_2)]$ et de $y\,[(m_1, m_2)]$ pour tout élément (m_1, m_2) de.$\mathcal{M}$.

d) Démontrer par induction que les écritures proposées sont valides pour tout élément de $\mathcal{M}$.

e) La réponse de la question 2.2 d) apporte-t-elle une solution à la question 2.2 b) ?

1.3 Proposer la définition d'une fonction qui déterminerait le nombre d'arbres de dérivations menant au couple (m_1, m_2) de $\mathcal{M}$ afin d'évaluer le coût supposé d'un algorithme de vérification de l'indépendance des définitions de x et de y du choix du chemin utilisé.

.../...

Exercice 2 *Relations*

N.B On change de feuille !

On rapporte le plan au repère orthonormé direct $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$. On rappelle que, selon le contexte, si R est une relation binaire interne sur E, on notera indifféremment $(a,b) \in R$ ou aRb.

2.1 On considère les relations binaires internes R_1 sur $\mathbb{N}^2$ définies par:

$$\begin{array}{lll} \forall (a,b) \in \mathbb{N}^2 \ \ \forall (a',b') \in \mathbb{N}^2 & (a,b) \ R_1 \ (a',b') & \Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z} \quad (a',b') = (a,b) + (k,0) \\ \forall (a,b) \in \mathbb{N}^2 \ \ \forall (a',b') \in \mathbb{N}^2 & (a,b) \ R_2 \ (a',b') & \Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z} \quad (a',b') = (a,b) + (0,k)\,. \end{array}$$

Que signifient géométriquement pour les points $M(a,b)$ et $M'(a',b')$ les définitions de R_1 et R_2 ?

2.2 Montrer que R_1 et R_2 sont d'équivalence.

2.3 Déterminer pour un (a,b) quelconque de $\mathbb{N}^2$ la classe $\overline{(a,b)}_1$ de (a,b) au sens de R_1, puis la classe $\overline{(a,b)}_2$ de (a,b) au sens de R_2. Interpréter géométriquement.

2.4 *Etude des puissances de* R_1 et R_2

a) Comparer R_1 et $R_1^2 = R_1 \circ R_1$. Qu'en déduire pour R_1^n pour tout n de $\mathbb{N}^*$? Comparer R_1 et $\mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}^2$.

N.B: Les conjectures proposées seront établies de façon précise.

b) Mêmes questions adaptées pour R_2. Les preuves ne seront pas détaillées ici mais seulement esquissées dans leur rapport avec le a) précédent.

2.5 Comparer $R_2 \circ R_1$ et $\mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}^2$.

N.B: On pourra ici découvrir le résultat géométriquement avant d'en fournir une preuve complète.