Utbm mt42 A13 **Examen médian** **Durée 2h**

Exercice 1 *Logique*

NB: On change de feuille.

1.1 *Entrée en matière*

Quelques questions pour se remettre les idées en place !

a) Prouver par la méthode de votre choix (sauf table de vérité) l'équivalence sémantique suivante :

$$(p \lor q) \land (r \lor p) \land (\neg q \lor \neg r \lor p) \equiv p$$

NB Pour rappel: étant données les formules F_1 et F_2, $F_1 \equiv F_2$ si et seulement si $F_1 \models F_2$ et $F_2 \models F_1$.

b) Etant données les formules F et G, peut-on dire que si F et $F \to G$ sont valides alors G est valide ? Justifier votre réponse.

c) Etant données les formules F et G, peut-on dire que soit $F \models G$ soit $F \models \neg G$? Justifier votre réponse.

d) Dire si l'énoncé suivant est vrai, sachant que F et G sont des formules:

1. "*si F est satisfiable et $F \to G$ est satisfiable alors G est satisfiable*". Justifier votre réponse.

1.2 *Travail de fond: forme normale conjonctive*

Considérons la formule:

$$(p \land r \lor \neg p) \land (r \lor q \lor r) \land (\neg q \lor \neg p \lor q) \qquad (1)$$

On dit que (1) est en forme normale conjonctive (FNC) car elle est une conjonction (et) de facteurs dont chacun est une disjonction de littéraux, un littéral étant une variable (p) ou la négation d'une variable ($\neg p$).

Il est facile de voir si une disjonction de littéraux est valide en examinant les littéraux qui la composent, comme l'exprime la question suivante.

a) *Question 1*

Prouver que la disjonction de littéraux $x_1 \lor x_2 \lor \cdots \lor x_n$ est valide si et seulement si il existe i, j vérifiant $1 \leq i < j \leq n$ tels que x_i et x_j sont des littéraux complémentaires (c'est-à-dire que l'un est une variable et l'autre la même variable complémentée). En d'autres termes, la disjonction est valide si elle contient la même variable une fois sans complémentation et une fois complémentée.

b) *Question 2*

Partant du résultat précédent, formulez une méthode de décision de la validité qui puisse s'appliquer à un formule F en FNC. Cette méthode consistera à examiner les disjonctions de F pour dire si F elle-même est valide ou non.

c) *Question 3*

Etant donnée une formule F quelconque du calcul des propositions, on peut obtenir une formule Q en FNC qui ait la même table de vérité que F (c'est à dire équivalente à F).

2. Expliquer comment obtenir Q en utilisant la table de vérité de F (piste proposée : examiner les lignes de la table où $F = 0$).

d) *Question 4*

A partir de ce qui précède, décrire une méthode permettant de décider de la validité d'une formule quelconque.

.../...

Figure 1:

Exercice 2 *Induction*

NB: On change de feuille. Les questions 2.1 et 2.2 sont indépendantes.

2.1 *Ensemble $\mathcal{M}$ défini par induction*

On considère l'ensemble $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ muni de l'addition ordinaire :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{N}^2 \quad \forall (a', b') \in \mathbb{N}^2 \quad (a, b) + (a', b') = (a + a', b + b').$$

On définit l'ensemble $\mathcal{M}$, partie de $\mathbb{N}^2$ par le schéma d'induction $(\mathcal{S})$ suivant:

- Base: $(0, 0) \in \mathcal{M}$.
- Règle:

$$\forall (m_1, m_2) \in \mathbb{N}^2 \quad [\{(m_1, m_2) \in \mathcal{M}\} \Rightarrow \{((m_1, m_2) + (2, 0) \in \mathcal{M}) \text{ et } ((m_1, m_2) + (0, 2) \in \mathcal{M})\}].$$

a) Proposer un arbre de dérivation pour le couple: $(4, 2)$. Cet arbre est-il unique ? Mêmes questions pour le couple $(4, 8)$.

b) Démontrer que $\mathcal{M} \subset \mathbb{N}^2$. En déduire que le schéma d'induction $(\mathcal{S})$ est consistant pour $\mathbb{N}^2$.

c) A-t-on $\mathbb{N}^2 \subset \mathcal{M}$. Que dire du schéma d'induction $(\mathcal{S})$ pour $\mathbb{N}^2$?

d) Quel ensemble permet de construire le schéma d'induction $(\mathcal{S})$?

2.2 *Induction et image*

On considère un motif **M0**, constitué d'un segment de longueur $l_0 = 1$. On définit inductivement un ensemble F de motifs du plan par le schéma inductif suivant:

- Base: **M0** $\in F$
- Règle:
  Si **M** est un motif de F alors le motif **M'** est aussi un motif de F, sachant que **M'** est obtenu à partir de **M** comme suit. Pour tout segment de **M**, on conserve le premier tiers et le dernier tiers mais on supprime le second et on le remplace par les deux autres côtés du triangle équilatéral construit sur ce second tiers. Voir en figure 1 le motif **M1** issu du motif **M0**.

a) Représenter les motifs **M2** et **M3** issus respectivement de **M1** et **M2**.

b) On note de façon générale **Mk+1** le motif issu de **Mk** pour tout **k** de $\mathbb{N}$. Définir inductivement la longueur l_k du motif **Mk**.

c) Expliciter l'écriture de l_k et étudier sa limite lorsque k tend vers $+\infty$.

d) Comment définir la surface comprise entre le motif **Mk** et le motif initial **M0** ?