MT44 Printemps 2006

Examen final du 28 juin 2008

Durée : deux heure(s)

Tout document autorisé - Calculatrice autorisée.

On rédigera les deux exercices sur deux copies différentes. On pourra admettre tout résultat intermédiaire afin de poursuivre la résolution d'un exercice.

Exercice 1 (Formules de quadrature et méthode de Gauss).
Soient $n \in \mathbb{N}^*$, a et b deux réels de $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$, tels que $a < b$, r une fonction continue sur (a, b) et w une fonction positive sur (a, b). On pose $f{=}rw$ et on suppose que f est intégrable sur (a, b).
Dans cet exercice, on étudie la formule de quadrature

$$\int_a^b r(x)w(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n} W_i r(x_i), \tag{1}$$

où $(x_i)_{0\leq i\leq n}$ s sont $n{+}1$ réels deux à deux distincts de (a, b) et $(W_i)_{0\leq i\leq n}$ s sont $n{+}1$ réels quelconques.

(1) Justifier sommairement pourquoi la formule de quadrature (1) est d'ordre $p \in \mathbb{N}^*$ (c'est-à-dire exacte pour tous les polynômes de degrés inférieur ou égal à p) si et seulement si :

$$\forall j \in \{0, ..., p\}, \quad \int_a^b x^j w(x)dx = \sum_{i=0}^{n} W_i x_i^j. \tag{2}$$

(2) Pourquoi (2) est équivalent à

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & ... & 1 \\ x_0 & x_1 & .... & x_n \\ x_0^2 & x_1^2 & .... & x_n^2 \\ & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_0^p & x_1^p & .... & x_n^p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_0 \\ W_1 \\ W_2 \\ \vdots \\ W_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_0 \\ I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_p \end{pmatrix}, \tag{3}$$

où

$$\forall j \in \{0, ..., p\}, \quad I_j = \int_a^b x^j w(x)dx\,? \tag{4}$$

(3) Pour toute la suite, on fera l'hypothèse que

$$p = 2n + 1. \tag{5}$$

De combien d'équations dispose-t-on ?

(4) Pour toute la suite, on fera l'hypothèse que

$$a = 0, \quad b = +\infty, \quad w(x) = e^{-x}. \tag{6}$$

(a) Calculer I_0 et I_1 défini par (4).

(b) Que devient (3) si $n = 0$ et $p = 1$?

(c) En déduire les valeurs de x_0 et de W_0 si $n = 0$.

(5) (a) Montrer que les (I_j) définis par (4) vérifient

$$\forall p \geq 1, \quad I_p = pI_{p-1}, \tag{7a}$$

$$I_0 = 1. \tag{7b}$$

(b) En déduire que

$$\forall p \geq 0, \quad I_p = p! \tag{8}$$

(6) Dans toute cette question, on supposera que

$$n = 1, \quad p = 3. \tag{9}$$

(a) Montrer que (3) est équivalent à

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x_0 & x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_0 \\ W_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{10a}$$

$$\begin{pmatrix} x_0^2 & x_1^2 \\ x_0^3 & x_1^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_0 \\ W_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}. \tag{10b}$$

(b) Calculer l'inverse de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x_0 & x_1 \end{pmatrix}$ et en déduire que

$$\left\{ \begin{array}{l} -x_0x_1 + x_0 + x_1 = 2, \\ -x_0x_1(x_0 + x_1) + x_0^2 + x_1^2 + x_0x_1 = 6. \end{array} \right. \tag{11}$$

(c) On pose $s = x_0 + x_1$ et $p = x_0x_1$. Calculer s et p grâce à (11) et en déduire que x_0 et x_1 sont solutions de

$$x^2 - 4x + 2 = 0. \tag{12}$$

(d) En déduire finalement les valeurs de x_0 et de x_1, puis de W_0 et de W_1.

(7) Peut-on généraliser les calculs des questions 4c et 6 pour n quelconque ? Comment organiseriez-vous les calculs ?

(8) (a) Déterminer les premiers polynômes de Laguerre $\mathcal{L}_0$, $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$.

(b) En déduire les points x_i des formules de Gauss-Laguerre pour $n = 0$ et $n = 1$; comparez avec les résultats des questions 4c et 6 et commentez !

Exercice 2 (Courbes de Bézier)**.**
Le plan P est rapporté au repère orthonormé direct $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$. Soit a un réel positif.

(1) *Approche géométrique de l'étude d'une Bézier*

On donne les points de contrôle

$$P_0\,(0,0)\,; \quad P_1\,(0,a)\,; \quad P_2\,(a,0)\,; \quad P_3\,(0,0)\,.$$

On note (Γ_a) la courbe de Bézier de points de contrôle (P_0, P_1, P_2, P_3). On rappelle que pour tout t de $[0,1]$, pour i et k vérifiant $0 \leq i \leq k \leq 3$, les polynômes de Bernstein vérifient :

$$B_i^k(t) = tB_i^{k-1}(t) + (1-t)B_{i+1}^{k-1}(t).$$

(a) En déduire la construction géométrique du point $B\,(t = 1/2)$ de la courbe cubique (Γ_a) considérée, de paramètre $t = 1/2$, obtenu comme barycentre de barycentres successifs des points (P_0, P_1, P_2, P_3) dotés des poids convenables, correspondant à la valeur de t considérée.

(b) Combien coûte la détermination de $B\,(t = 1/2)$, en nombre de calculs de barycentres de deux points ?

(2) *Etude de la courbe de Bézier* (Γ_a).

(a) Déterminer la courbe de Bézier (Γ_a), de points de contrôle (P_0, P_1, P_2, P_3), où (Γ_a) est considéré comme l'ensemble des points $B(t)$ de coordonnées $(x(t), y(t))$.

(b) Etudier la fonction $t \in [0,1] \mapsto (x(t), y(t))$ pour a quelconque.

(c) On fixe pour cette seule sous-question $a = 4$. Fournir une allure de la courbe représentative (Γ_4) .

(3) *Utilisation de la courbe* (Γ_a)

La courbe étudiée précédemment est en fait utilisée dans un problème de chaudronnerie industrielle, dans lequel on doit déterminer l'aire de la boucle de courbe obtenue à la question 2 à des fins d'évaluation d'échanges gazeux.

Conventions et notations

- On suppose disposer, pour a donné, d'un vecteur T de valeurs réelles de t comprises entre 0 et 1 à pas h constant, des vecteurs de coordonnées associées (X, Y) des points $B(t)$ de la courbe (Γ_a) antérieure. Ainsi de façon précise X et Y comportent N colonnes $(N > 1)$ et l'on a :

$$\forall i \in \{1, ..., N\} \quad t = (i-1) * h \text{ et } B(t) \text{ est de coordonnées } (X(i), Y(i)) \text{ sachant que } h = \frac{1}{N-1}.$$

- Pour un vecteur V de N colonnes, on note $dV = diff(V)$ le vecteur de $N-1$ colonnes, défini par :

$$\forall i \in \{1, ..., N-1\} \quad dV(i) = V(i+1) - V(i).$$

- Pour un vecteur V de taille N, on note $V_{i,j}$ le sous-vecteur extrait de V, constitué des valeurs de V d'indices compris entre i et j, pour $1 \leq i \leq j \leq N$.

(a) Si le vecteur T est à pas constant h, les vecteurs X et Y sont-ils en général à pas constant ?

(b) Que représente le vecteur dX géométriquement ?

(c) Montrer que le produit matriciel $dX *^t (Y_{1,N-1})$ fournit une valeur approchée par méthode des rectangles de l'aire interne à la boucle de la courbe (Γ_a). Que peut-on dire du produit matriciel $dX *^t (Y_{2,N})$?

(d) En théorie des courbes paramétriques, un théorème établit que l'aire A interne à la boucle de (Γ_a) est donnée par :

$$A = \frac{1}{2} \int_{\Gamma_a} (ydx - xdy) \, .$$

Justifier ce résultat.