Nb : Les deux exercices seront absolument rédigés sur des feuilles séparées, svp.

Exercice 1 *Géométrie*

On rapporte le plan affine au repère orthonormé direct $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$. On considère le polygône de contrôle $\mathbf{P} = (P_0, P_1, P_2, P_3)$ avec $P_0\,(0,1)$, $P_1\,(2,3)$, $P_2\,(4,1)$ et $P_3\,(6,3)$ et un vecteur noeud $\tau = (t_0, ..., t_6)$ tel que $0 \leq t_0 \leq t_1 \leq ... \leq t_6 \leq 1$. On notera γ_2 la courbe B-spline de degré 2, associée au vecteur noeud τ et au polygône de contrôle $\mathbf{P}$.

1.1 Combien de fonctions B-splines de degré 2 génère-t-on avec le vecteur noeud τ?

1.2 Proposer un choix de noeuds possibles pour que γ_2 soit vissée aux extrémités.

1.3 Soit $t \in [t_3, t_4[$.

a) Evaluer $\gamma_2\,(t)$ en utilisant l'algorithme de Cox- De Boor et obtenir une expression en fonction des coefficients $\omega_{3,1}(t)$, $\omega_{3,2}(t)$, $\omega_{2,2}(t)$ et des points P_1, P_2, P_3.

Nb : On pourra présenter les calculs en mettant en évidence l'aspect triangulaire de l'algorithme.

b) En déduire que si $t = t_3$ alors $\gamma_2\,(t_3) = (1 - \omega_{2,2}(t_3))\,P_1 + \omega_{2,2}(t_3)P_2$.

c) Montrer alors que $\gamma_2\,(t_3)$ est le milieu du segment $[P_1, P_2]$ si et seulement si t_3 est le milieu de $[t_2, t_4]$.

1.4 En utilisant ce qui précède et les propriétés de tangence des courbes B-splines de degré 2, tracer la courbe $t \mapsto \gamma_2\,(t)$ sur l'intervalle $[0,1]$ pour le noeud $\tau = (0, 0, 0, 1/2, 1, 1, 1)$.

1.5 On considère maintenant un polygône de contrôle à $n+1$ points, $\mathbf{P} = (P_0, ..., P_n)$. Comment doit-on choisir le vecteur noeud pour que la courbe B-spline de degré 2 soit vissée aux extrémités et passe par les points milieux des côtés du polygône de contrôle $[P_i, P_{i+1}]$ pour i compris entre 1 et $n-2$?

1.6 *Interpolation*

On souhaite construire une courbe B-spline de degré 2 vissée aux extrémités qui interpole une famille de n points de coordonnées $\{(x_i, y_i) \;/\; 0 \leq i \leq n-1\}$. On choisira comme noeuds :

$$t_0 = t_1 = t_2 = 0;\; t_3 = \frac{1}{n-1};\; t_4 = \frac{2}{n-1}; ...; t_n = \frac{n-2}{n-1}; t_{n+1} = t_{n+2} = t_{n+3} = 1.$$

a) Montrer qu'il n'existe pas de choix pour les points de contrôle P_0 et P_n.

b) On suppose P_1 choisi. Comment faut-il choisir P_2 ?

c) Conclure qu'il existe une courbe B-spline de degré 2 qui interpole les n points de cooordonnées

$\{(x_i, y_i) \,/\, 0 \leq i \leq n-1\}$.

Quels choix a-t-on pour les tangentes aux extrémités ? Comparer avec le résultat vu en cours sur les interpolations par B-splines de degré 3.

d) *Application*

Construire un polygône de contrôle et un vecteur noeud qui génère une courbe B-spline de degré 2 passant par les points de coordonnées

$$\{(1,0)\,, (2,3)\,, (4,1)\,, (3,-1)\,, (2,0)\}\,.$$

Tracer la courbe et son polygône de contrôle. .../...

Exercice 2 *Intégration numérique*

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^{\lambda x}$, avec $\lambda \in [1, +\infty[$. On se propose de comparer la qualité de différentes méthodes d'intégration numérique de f sur un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$. On suppose désormais que: $a \leq b$.

2.1 *Propriétés de f*

a) Montrer que f est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$. En déduire qu'elle est de classe C^4 sur $[a, b]$.

b) Etudier les variations de la dérivée première de f, notée $f^{(1)}$, sur $[a, b]$. En déduire l'existence d'un majorant M_1 de $\left|f^{(1)}\right|$ sur $[a, b]$; on déterminera M_1.

c) Etudier les variations de la dérivée quarte de f, notée $f^{(4)}$, sur $[a, b]$. En déduire l'existence d'un majorant M_4 de $\left|f^{(4)}\right|$ sur $[a, b]$; on déterminera M_4.

d) Montrer que f est intégrable sur $[a, b]$ et calculer $I = \int_a^b f(x)dx$.

Nb : On aura saisi qu'on s'intéresse ultérieurement, non pas à la valeur de l'intégrale I parfaitement connue, mais à la manière dont cette valeur est approchée par intégration numérique sur $[a, b]$.

2.2 *Comparaison des méthodes de Simpson et des rectangles*

On adopte les notations du cours. Soit E_R [respectivement E_S] l'erreur de méthode commise en intégration par méthode des rectangles [respectivement de Simpson] relative à un pas d'intégration h ($h \in \mathbb{R}^{+*}$).

a) Rappeler l'expression de E_R et celle de E_S.

b) Majorer $|E_R|$ et $|E_S|$ en fonction de h, a, b, M_1, M_4.

c) En déduire une condition suffisante portant sur h pour que $|E_R| \leq \varepsilon$ [respectivement $|E_S| \leq \varepsilon$], où ε désigne un réel strictement positif arbitrairement petit. Les conditions trouvées sont elles nécessaires ?

d) Déduire de 2.2 c), en fonction de ε, a, b, M_1, M_4, le pas maximal h_R [respectivement h_S] garant du fait que $|E_R| \leq \varepsilon$ [respectivement $|E_R| \leq \varepsilon$].

e) *Comparaison de* h_S et h_R

On note $q(\varepsilon)$ le quotient défini par $q(\varepsilon) = h_S/h_R$.

- Fournir l'expression de $q(\varepsilon)$ en fonction de ε, a, b, M_1, M_4.
- Discuter brièvement de l'effet des différents constituants de l'écriture de $q(\varepsilon)$ sur sa taille.

f) *Application*

On donne :

$$\lambda = 2; \quad a = 2; \quad b = 4.$$

- Etudier sur $]0, 1]$ la fonction $q : \varepsilon \mapsto q(\varepsilon)$.
- Interpréter les résultats obtenus.