Utbm mt44 **Examen final** **Printemps 2010**

Nb: On rédigera les exercices sur des feuilles séparées. On pourra admettre tout résultat intermédiaire afin de poursuivre la résolution d'un exercice.

Exercice 1 *Intégration gaussienne*

Soit r une fonction de classe C^∞ sur $[-1,1]$. On considère l'intégrale I donnée par :

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{r(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

1.1 *Généralités et outils*

a) Montrer que l'intégrale I existe et qu'elle peut être calculée par méthode de Gauss-Chebyshev à quatre points $\{x_0, ..., x_3\}$.

b) Représenter graphiquement les points du support $\{x_0, ..., x_3\}$. En déduire que si r est impaire sur $[-1,1]$, la valeur approchée I_{app} de I par méthode de Gauss-Chebyshev est exacte. Peut-on généraliser ce résultat ?

c) On pose désormais, pour toute la suite de l'exercice, $r(x) = e^{-x}$. Etudier les variations de la dérivée d'ordre 8 de r, notée $r^{(8)}$, sur $[-1,1]$ et en déduire que : $\forall x \in [-1,1] \quad \left|r^{(8)}(x)\right| \leq e$.

1.2 *Mise en oeuvre de l'intégration de Gauss-Chebyshev*

a) Calculer I_{app} pour r donné.

b) Fournir un majorant de la valeur absolue de l'erreur de méthode $|I - I_{app}|$ commise lors de cette intégration.

c) En déduire un encadrement de la valeur exacte de l'intégrale I.

1.3 *Variante incorrecte !*

Un(e) étudiant(e) incompétent(e) souhaite absolument mettre en oeuvre une méthode de Gauss-Legendre à quatre points $\{X_0, ..., X_3\}$ pour calculer une valeur approchée de I.

a) En notant f définie par $f(x) = r(x)/\sqrt{1-x^2}$, montrer que les conditions suffisantes sur f ne sont pas vérifiées pour pouvoir calculer I par méthode de Gauss-Legendre.

b) L'étudiant(e) insiste pourtant et met en oeuvre son idée. Fournir la valeur J_{app} issue de son calcul.

Nb : Pour ce faire on extrait d'une table les points du support de Legendre $(X_i)_{0\leq i\leq 3}$ et les coefficients $(D_i)_{0\leq i\leq 3}$ de la formule de quadrature associée; on fournit donc :

i	0	1	2	3
X_i	$-0,8611363116$	$-0,3399810436$	$-X_1$	$-X_0$
D_i	$0,3478548451$	$0,6521451549$	D_1	D_0

c) Peut-on en déduire que la valeur approchée J_{app} est assurément fausse ?

.../...

Exercice 2 *Géométrie*

PARTIE I Construction d'une spline cubique avec noeud uniforme

Dans toute cette première partie, on considère le vecteur noeud uniforme suivant: $\tau = (t_0, ..., t_{m+3})$ avec:

- $t_0 = t_1 = t_2 = t_3 = 0$
- $t_4 = 1, t_5 = 2, ..., t_j = j - 3, ..., t_{m-1} = m - 4$
- $t_m = t_{m+1} = t_{m+2} = t_{m+3} = m - 3.$

On note comme dans le cours $B_{i,3}$ $(0 \leq i \leq m-1)$ les m fonctions splines de degré 3 générées par le noeud τ.

Etant donné un polygone de contrôle $\mathbf{P}= \{P_0, ..., P_{m-1}\}$, la courbe B-spline définie par τ et $\mathbf{P}$ est la courbe paramétrée sur $[0, m-3]$ définie par $\gamma(x) = \sum_{i=0}^{m-1} B_{i,3}(x)P_i$.

I.1 *Résultats techniques*

a) Rappeler les propriétés des fonctions B-splines $B_{i,k}$ qui permettent de montrer que pour tout $x \in [t_j, t_{j+1}[$ on a :

$$\gamma(x) = B_{j-3,3}(x)P_{j-3} + B_{j-2,3}(x)P_{j-2} + B_{j-1,3}(x)P_{j-1} + B_{j,3}(x)P_j \qquad (*)$$

b) En utilisant la définition récursive des fonctions B-splines, montrer que :

$$\begin{aligned} B_{i,2}(x) &= \frac{(x-t_i)^2}{2} B_{i,0}(x) + \frac{(x-t_i)(t_{i+2}-x)}{2} B_{i+1,0}(x) + \\ &\quad \frac{(t_{i+3}-x)(x-t_{i+1})}{2} B_{i+1,0}(x) + \frac{(t_{i+3}-x)^2}{2} B_{i+2,0}(x) \end{aligned}$$

c) En déduire que pour $x = t_j$, avec $4 \leq j \leq m-4$ (ce qui implique $t_{j+1} - t_j = 1$), on a :

$$B_{i,2}(t_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } i = j-3 \\ 1/2 & \text{si } i = j-2 \\ 1/2 & \text{si } i = j-1 \\ 0 & \text{si } i = j \end{cases}$$

d) Prouver finalement que :

$$B_{i,3}(t_j) = \begin{cases} 1/6 & \text{si } i = j-3 \\ 2/3 & \text{si } i = j-2 \\ 1/6 & \text{si } i = j-1 \\ 0 & \text{si } i = j \end{cases}$$

e) Déduire de la relation $(*)$, l'expression de $\gamma(t_j)$ en fonction des P_i.

f) On rappelle que $(*)$ permet de montrer que :

$$\gamma'(x) = B_{j-2,2}(x)\Delta P_{j-2} + B_{j-1,2}(x)\Delta P_{j-1} + B_{j,2}(x)\Delta P_j.$$

Exprimer $\gamma'(t_j)$ en fonction de ΔP_{j-2} et ΔP_{j-1}.

g) Retrouver ce résultat en appliquant l'algorithme de De Boor Cox aux vecteurs ΔP_{j-2}, ΔP_{j-1} et ΔP_j. On pourra donner une représentation triangulaire des calculs.

.../...

I.2 *Exemple*

On considère le noeud $(0,0,0,0,1,2,3,3,3,3)$ et les points de contrôle $P_0\,(0,0)$, $P_1\,(-2,1)$, $P_2\,(-1,2)$, $P_3\,(1,2)$, $P_4\,(2,1)$ et $P_5 = P_0$; soit γ la courbe B-spline de degré 3 correspondante.

a) Calculer les coordonnées des points $\gamma\,(1)$ et $\gamma\,(2)$ et les composantes des vecteurs $\gamma'\,(1)$ et $\gamma'\,(2)$.

b) Pourquoi la courbe est-elle vissée aux extrémités ?

c) Esquissez la courbe.

d) A l'aide de vos souvenirs de géométrie (médiane, barycentre,etc...) montrer en toute généralité pour le noeud uniforme τ que $\gamma\,(t_j)$ est le milieu de la médiane du triangle $P_{j-3}P_{j-2}P_{j-1}$ passant par P_{j-2} et que $\gamma'\,(t_j) = 1/2\overrightarrow{P_{j-3}P_{j-1}}$.

PARTIE II Surfaces splines

On généralise la notion de surface de Bézier via les courbes B-splines. Pour cela, on considère deux vecteurs noeuds :

$$\tau = (x_0, x_1, ..., x_{m+k}) \text{ et } \eta = (y_0, y_1, ..., y_{n+l}) .$$

La donnée de τ permet de générer m fonctions B-splines de degré k notées $B_{i,k}$, et la donnée de η permet de générer n fonctions B-splines de degré l, notées $B_{j,l}$. On considère alors un réseau de points R=$\{P_{i,j}$ avec $0 \leq i \leq m-1$ et $0 \leq j \leq n-1\}$ et on définit la surface B-spline de noeud (τ, η) et de réseau R comme la surface paramétrée :

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & [x_0, x_m] \times [y_0, y_n] & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (u,v) & \mapsto & \sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{n-1} B_{i,k}(u)B_{j,l}(v)P_{i,j} \end{array}$$

II.1 Comment doit-on choisir les noeuds τ et η pour que la définition précédente coïncide avec celle d'une surface (carreau) de Bézier de degré (m,n) ?

II.2 On note $P_i(v) = \sum_{j=0}^{n-1} B_{j,l}(v)P_{i,j}$. Montrer que $\Phi\,[(u,v)] = \sum_{i=0}^{m-1} B_{i,m-1}(u)P_i(v)$. En déduire que la courbe isoparamétrique correspondant à $v = v_0$ est une courbe B-spline de degré k. Que dire des courbes isoparamétriques correspondant à $u = u_0$?

III.3 On considère les noeuds $\tau = (0,0,1,1)$ et $\eta = (0,0,0,0,1,2,3,3,3,3)$. Montrer que quelque soit le réseau de contrôle la surface correspondante est réglée.

III.4 Représenter la surface B-spline définie par les vecteurs noeuds $\tau = (0,0,1,1)$, $\eta = (0,0,0,0,1,2,3,3,3,3)$ et de réseau de contrôle $P_{0,0}\,(0,0,0)$, $P_{0,1}\,(-2,1,0)$, $P_{0,2}\,(-1,2,0)$, $P_{0,3}\,(1,2,0)$, $P_{0,4}\,(2,1,0)$, $P_{0,5} = P_{0,0}$ et $P_{1,0}\,(0,0,1)$, $P_{1,1}\,(-2,1,1)$, $P_{1,2}\,(-1,2,1)$, $P_{1,3}\,(1,2,1)$, $P_{1,4}\,(2,1,1)$, $P_{1,5} = P_{0,0}$.