Final MT44

Tout document autorisé, calculatrice autorisée.

Problème 1

Le but de ce problème est d'étudier la méthode de Gauss-Hermitte pour calculer numériquement les intégrales du type

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-x^2}dx$$

où f est une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$.

Concernant le calcul des intégrales impropres du type $\int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx$ on rappelle que $\int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx$ existe si et seulement si $\int_{-\infty}^{a} g(x)dx$ et $\int_{a}^{\infty} g(x)dx$ existent et dans ce cas on a $\int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx = \int_{-\infty}^{a} g(x)dx + \int_{a}^{\infty} g(x)dx$. On admet de plus

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$$

1. Produit scalaire. On considère sur l'espace vectoriel des polynômes $\mathcal{P}$ le "crochet" $<,>$: $\mathcal{P}\times\mathcal{P}\to\mathbb{R}$ défini par $< p,q >= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-x^2}dx$.

- **a.** Montrer que $<,>$ défini bien un produit scalaire sur $\mathcal{P}$.
- **b.** Montrer que $||1||^2 =< 1,1 >= \sqrt{\pi}$, où $||.||$ est la norme déduite du produit scalaire.
- **c.** À l'aide d'une intégration par partie montrer que $< 1,x >= 0$.
- **d.** Montrer que $< x^p, x^q >= \dfrac{p+q-1}{2} < x^{p-1}, x^{q-1} >$.
- **e.** Expliquer pourquoi les relations $(\star)\begin{cases} <1,1> & = \sqrt{\pi} \\ <1,x> & = 0 \\ <x^p,x^q> & = \dfrac{p+q-1}{2} < x^{p-1},x^{q-1} > \end{cases}$ permettent d'évaluer $\int_{-\infty}^{\infty} x^n e^{-x^2}dx$ quelque soit $n\in\mathbb{N}$.
- **f.** En déduire $\int_{-\infty}^{\infty} x^4e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}.\frac{3}{4}$

2. Intégration de Hermite à deux points.

- **a.** On considère la base canonique $\{1,x,x^2\}$ de $\mathcal{P}_2$. Utiliser le procédé de Gram-Schmidt pour obtenir une base de $\mathcal{P}_2$ orthogonale pour le produit scalaire $<,>$. On notera L_0, L_1, L_2 les polynômes ainsi obtenus.
- **b.** Calculer les racines x_0 et x_1 de L_2 et en déduire que le support d'intégration pour une intégrale de Gauss-Hermite à deux points est $\{-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\}$.
- **c.** Déterminer à partir des polynômes de Lagrange $l_0(x) = \dfrac{x-x_1}{x_0-x_1}$ et $l_1(x) = \dfrac{x-x_0}{x_1-x_0}$ les poids W_0, W_1 associés au support d'intégration.
- **d.** Intégrer numériquement $\int_{-\infty}^{\infty} x^4e^{-x^2}dx$ et proposer une majoration de l'erreur à partir des expressions théorique de l'erreur en Gauss-Hermite. .
- **e.** Vérifier que cette majoration de l'erreur est cohérante avec le résultat exact obtenu à la question **1.f**.

3. Vers une expression explicite des polynômes de Gauss-Hermite. On considère les fonctions

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2})$$

a. Calculer H_0 et H_1

b. Montrer par récurrence que $(e^{-x^2})^{(n)} = p(x)e^{-x^2}$ avec $p \in \mathcal{P}^n$. En déduire que H_n est un polynôme de degré n.

c. Relation de récurrence : on rappelle la conséquence suivante de la formule de Leibnitz $\frac{d^n}{dx^n} xf(x) = x\frac{d^n}{dx^n}f(x) + \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}f(x)$.

i. Montrer que $H_{n+1} = (-1)^{n+1}e^{-x^2}\frac{d^n}{dx^n}(xe^{-x^2})$.

ii. En déduire que $H_{n+1} = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x)$.

iii. En déduire par un résultat généal du cours que H_n est bien la base de Hermite et expliquer le lien entre L_2 et H_2.

Changer de copie

Problème 2

Les trois questions sont indépendantes.

1. On considère le réseau $\mathcal{R} = \{P_{00}, P_{01}, \dots, P_{12}\}$ donné par

$$P_{00}(0,0,0), P_{01}(1,1,0), P_{02}(2,0,0), P_{10}(0,0,2), P_{11}(1,-1,2), P_{12}(0,-2,2)$$

a. Déterminer les équations de la courbe isoparamétrique $u = u_0$ sous forme d'une courbe de Bézier définie par les points de contrôles $P_0(u_0), P_1(u_0), P_2(u_0)$; on précisera comment sont construit les $P_i(u_0)$.

b. Même question pour $v = v_0$.

c. Représenter les courbes correspondant à $u = 0$, $u = \dfrac{1}{2}$, $u = 1$ et $v = 0$, $v = \frac{1}{2}$, $v = 1$.

d. Dessiner la surface.

2. On considère une surface de Bézier S de degré $(3,1)$ cylindrique dont la directrice est une courbe de Bézier Γ de degré 3 dans le plan (Oxy) et dont la direction génératrice est orthogonale au plan (Oxy). On note $P_0(1,0,0)$, $P_1(a_1,b_1,0)$, $P_2(a_2,b_2,0)$ et $P_3(-1,0,0)$ avec a_1, b_1, b_2 strictement positifs et a_2 strictement négatif. les points du polygone de contrôle de Γ.

a. Déterminer un réseau de contrôle $\mathcal{R}$ qui définit S et esquisser la surface obtenue (on choisira des valeurs arbitraires de a_i, b_i pour la représentation).

b. Déterminer un réseau $\mathcal{R}'$ d'une surface S', symétrique de S par rapport au plan (Oxz).

c. Déterminer les valeurs de a_i qui assurent un recollement $\mathcal{C}^1$ des surfaces S et S', c'est à dire un recollement tel que le vecteur normal soit bien défini sur la partie $S \cap S'$; on pourra argumenter à l'aide d'un dessin clair.

3. Pour une surface de Bézier de degré (m,n) l'évaluation d'un point $M(u_0, v_0)$ de la surface se fait par l'algorithme de De Casteljau tensoriel. Pour cela on calcule dans un premier temps les points $P_i(v_0) = \sum_{j=0}^n B_j^n(v_0)P_{ij}$ puis $M(u_0,v_0) = \sum_{i=0}^m B_i^m(u_0)P_i(v_0)$.

a. Déterminer la complexité de l'algorithme de De Casteljau tensoriel en fonction du degré (m,n) de la surface.

b. Que se passe-t-il en terme de complexité si on calcule d'abord les points $P_j(u_0)$ à la place des points $P_i(v_0)$, pour déterminer $M(u_0,v_0)$?