Utbm mt44 **Examen final** **Printemps 2013**

Nb: On rédigera absolument l'exercice 1 et les exercices 2 et 3 sur des feuilles séparées.

Exercice 1 *Géométrie*

N.B: On change de feuille

Les deux parties de l'exercice sont indépendantes.

1.1 Partie A

Un joaillier vient d'acquérir un logiciel de dessin vectoriel pour la conception de bijoux. Pour concevoir un bracelet, il commence par dessiner un demi-bracelet (une arche), noté S, qu'il définit comme la surface de Bézier de réseau de contrôle $R=\{P_{00}, P_{01}, P_{02}, P_{10}, P_{11}, P_{12}, P_{20}, P_{21}, P_{22}\}$ avec les coordonnées suivantes données dans un repère orthonormé direct $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$:

$$\begin{array}{lll} P_{00}\,(0,0,0)\,, & P_{01}\,(1,-1,0)\,, & P_{02}\,(2,0,0) \\ P_{10}\,(0,2,1)\,, & P_{11}\,(1,2,2)\,, & P_{12}\,(2,2,1) \\ P_{20}\,(0,4,0)\,, & P_{21}\,(1,5,0)\,, & P_{22}\,(2,4,0) \end{array}$$

a) Sur un dessin clair, représenter le repère et le réseau de contrôle R.

b) Donner les équations paramétriques Φ de la surface de Bézier S définie par R. On donnera ces équations en fonction des P_{ij}, c'est-à-dire qu'on ne développera pas l'expression pour chaque coordonnée x, y, z. Quel est le bidegré (m, n) de cette surface ?

c) Utiliser la relation fondamentale pour fournir les courbes isoparamétriques suivantes:

- $\gamma_{v=v_0}(u) = \Phi(u, v_0)$, courbe isoparamétrique définie par $v = v_0$, que vous donnerez en fonction des points de support $P_j(v_0)$ après avoir rappelé leur construction.
- $\gamma_{u=u_0}(v) = \Phi(u_0, v)$, courbe isoparamétrique définie par $u = u_0$, que vous donnerez en fonction des points de support $P_i(u_0)$ après avoir rappelé leur construction.

d) Tracer les courbes isoparamétriques définies par $u = 0$, $u = 1/2$ et $u = 1$ puis $v = 0$, $v = 1/2$ et $v = 1$. Esquissez la surface S définissant ce demi-bracelet.

e) Calculez, en utilisant l'algorithme de Casteljau tensoriel, les coordonnées du point $\Phi(1/2, 1/2)$.

f) Pour finaliser le bijou, le joaillier symétrise par rapport au plan (Oxy) le réseau R. Il obtient ainsi une deuxième surface de Bézier, notée *S'*, définie par *R'* le réseau symétrique de R. Puis il "recolle" les deux demi-bracelets S et *S'* le long de deux courbes Γ_1 et Γ_2.

- A quelles courbes isoparamétriques de S correspondent Γ_1 et Γ_2 ?
- Expliquer pourquoi, en symétrisant le réseau R, on ne peut pas avoir un recollement C^1.
- Si le joaillier veut un recollement C^1 tout en conservant l'allure de son bijou (en particulier sans modifier les courbes de recollement Γ_1 et Γ_2) quel bidegré doit-il choisir pour définir la surface S? Expliquer.

1.2 Partie B

Soit Φ une surface (carreau) de Bézier de degré (m, n), définie par un réseau de points de contrôle $R=\{P_{00}, \ldots, P_{mn}\}$.

a) Montrer que les courbes frontières γ_1 et γ_2 définies par $\gamma_1(u) = \Phi(u, 0)$ et $\gamma_2(u) = \Phi(u, 1)$ sont des courbes de Bézier de degré m.

b) En déduire que les points P_{00}, P_{m0}, P_{0n} et P_{mn} de R appartiennent à la surface.

... / ...

Exercice 2 *Intégration gaussienne*

N.B: On change de feuille

On considère l'intégrale I définie par:

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{r(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx,$$

où la fonction r de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est donnée par: $r(x) = \cos(x/2)$.

2.1 *Existence de l'intégrale I*

a) Montrer que l'intégrale I existe.

b) Montrer que I peut être calculée par méthode de Gauss-Chebyschev.

c) I peut-elle être calculée par méthode de Gauss-Legendre ?

2.2 *Valeur approchée de I*

Fournir la valeur approchée de I obtenue par méthode de Gauss-Chebyschev à trois points.

2.3 *Erreur de méthode*

a) Fournir une majoration de la valeur absolue de l'erreur de méthode commise dans l'évaluation de I.

b) Commenter brièvement le résultat obtenu.

Exercice 3 *Utilisation de l'interpolation polynômiale pour la résolution d'équations*

N.B: Même feuille que l'exercice 2

Soit A un réel élément de $I =]1, +\infty[$. On considère l'équation $(E) : f(x) = 0$, où f fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est définie par $f(x) = x^2 - A$.

L'objet de l'exercice est de déterminer une valeur approchée de la solution positive de (E) par l'intermédiaire d'une équation "approchée".

3.1 *Existence et unicité de solution sur I*

- Etudier la fonction f sur I et montrer que (E) admet une solution unique, notée l, dans I. Que représente l sous les notations ordinaires ?
- Tracer la courbe représentative (C) de f dans un repère du plan.

3.2 *Equation approchée de (E)*

On considère deux réels α, β, distincts ou non, de I.

a) Déterminer le polynôme p_1 qui interpole f sur le support $\{\alpha, \beta\}$.

b) On définit l'équation approchée $(E_{\alpha\beta})$ de (E), relative au support $\{\alpha, \beta\}$, par :

$$(E_{\alpha\beta}) : p_1(x) = 0.$$

b1) Montrer que si $\alpha \neq \beta$, $(E_{\alpha\beta})$ s'écrit:

$$(E_{\alpha\beta}) : \alpha^2 - A + (\beta + \alpha)(x - \alpha) = 0.$$

Résoudre l'équation $(E_{\alpha\beta})$ dans ce premier cas.

... / ...

b2) Montrer que si $\alpha = \beta$, $(E_{\alpha\beta})$ s'écrit:

$$(E_{\alpha\beta}) : \alpha^2 - A + 2\alpha (x - \alpha) = 0.$$

Nb: On rappelle que dans ce cas $f[\alpha, \alpha] = f'(\alpha)$.

Résoudre l'équation $(E_{\alpha\beta})$ dans ce deuxième cas.

b3) *On réfléchit !*

Montrer comment la démarche proposée revient à résoudre en lieu et place d'une équation (E) donnée une équation "fausse". Quelle est l'intérêt d'une telle méthode au delà du choix du f particulier considéré?

3.3 *Deux cas particuliers importants*

a) *Cas particulier 1*

Soit x_0 et x_1 deux éléments distincts de I.

- Soit $n = 1$; on pose $\alpha = x_n$ et $\beta = x_{n-1}$. On note l_a la solution de $(E_{\alpha\beta})$ trouvée en 3.2b1).
  - Fournir l'expression de l_a en fonction de x_n et x_{n-1}.
  - Que représente géométriquement l_a par rapport à la corde $(M_n M_{n-1})$, où M_n et M_{n-1}désignent les points de la courbe (C) d'abscisses respectives x_n et x_{n-1}?
  - On pose alors $x_{n+1} = l_a$.
- Soit alors $n = 2$; on itère le processus décrit ci-dessus, puis on fait de même pour tout n.
  Montrer qu'on définit ainsi une suite (x_n) - dite des itérés de Lagrange relatifs à l'équation (E) - à partir du choix de x_0 et x_1, sous certaines conditions à préciser. Que peut-on espérer de la suite (x_n) ?

b) *Cas particulier 2*

Soit x_0 un élément de I.

- Soit $n = 0$; on pose $\alpha = x_n$ et $\beta = x_n$. On note l_a la solution de $(E_{\alpha\beta})$ trouvée en 3.2b2.).
  - Fournir l'expression de l_a en fonction de x_n.
  - Que représente géométriquement l_a par rapport à la tangente en M_n à la courbe représentative (C) de f, où M_n désigne le point de (C) d'abscisse x_n? En déduire que l_a est dans I. et vérifie $l_a \geq l$.
  - On pose alors $x_{n+1} = l_a$.
- Soit alors $n = 1$; on itère le processus décrit ci-dessus et de même, pour tout n.
  Montrer qu'on définit ainsi une suite (x_n) - dite des itérés de Newton relatifs à l'équation (E) - à partir du choix de x_0, sous certaines conditions à préciser. Que peut-on espérer de la suite (x_n) ?

c) En déduire que les itérations de Lagrange et de Newton sont des cas particuliers d'un même processus.

N.B: La méthode de calcul des racines carrées découverte à Babylone vers les années -1800 repose sur une idée géométrique simple et efficace. Elle correspond en fait à la méthode de Newton définie ci-dessus; mais ceci n'avait pas été perçu ! Elle est aujourd'hui implémentée dans toutes les machines du monde comme la plus rapidement convergente connue.