Examen final

Durée : 2h. Tout document autorisé (sauf livre), calculatrices autorisées.

Nb: on rédigera les deux exercices sur deux copies différentes. On pourra admettre tout résultat intermédiaire afin de poursuivre la résolution d'un exercice.

Exercice 1 *Intégration gaussienne*

On se propose de calculer une valeur approchée d'intégrale par méthode gaussienne . On considère I_α définie par :

$$I_\alpha = \int_{-1}^{1} \frac{r_\alpha(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx \quad \text{avec} \quad r_\alpha(x) = e^{\alpha x} \text{ , sachant } \alpha \in]0,1[\,.$$

On suppose avoir prouvé, par un théorème relatif aux intégrales généralisées, que cette intégrale existe sur l'intervalle considéré.

1.1 *Choix de la méthode*

a) *Etude de la fonction r_α*

L'objet de cette sous-question est d'obtenir des résultats qui seront appelés ultérieurement pour mener à bien le traitement du problème proposé.

- Montrer que r_α est indéfiniment dérivable sur $[-1, 1]$.
- Déterminer pour tout k de $\mathbb{N}^*$ la dérivée d'ordre k de r_α, notée $r_\alpha^{(k)}$.
- Montrer qu'il existe un réel positif M_k, fonction de α, qui majore $\left|r_\alpha^{(k)}\right|$ sur $[-1, 1]$. Déterminer M_k.
  Nb : Si M_k n'est pas déterminé numériquement, on le considérera néanmoins connu par cette seule notation.

b) Déduire des résultats précédents que l'intégrale I_α proposée relève d'une intégration de Gauss-Chebyschev, pour tout support de $n + 1$ points.

c) On pose désormais pour la suite $\alpha = 1/2$.

1.2 *Mise en oeuvre d'un cas particulier*

On choisit une intégration gaussienne à trois points pour cette seule sous-question.

a) Fournir la valeur approchée de $I_{1/2}$ ainsi obtenue.

b) Fournir une majoration de la valeur absolue de l'erreur de méthode commise dans l'évaluation de l'intégrale $I_{1/2}$.

c) Etait-il possible d'utiliser une méthode de Simpson pour calculer $I_{1/2}$? Argumenter.

1.3 *Etude du nombre de points de support nécessaires pour atteindre une précision donnée*

a) Montrer que la suite de réels strictement positifs (M_k) est décroissante. N.B : On aura intérêt à étudier le rapport M_{k+1}/M_k.

b) Montrer que la suite (M_k) converge vers 0. Discuter brièvement de la vitesse de convergence.

c) En déduire que pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un plus petit entier k_0 tel que la valeur absolue de l'erreur de méthode commise dans l'évaluation de $I_{1/2}$ par méthode gaussienne à k points, avec $k \geqslant k_0 + 1$, soit inférieure à ε.

Exercice 2 : *Courbes de Bézier*

Les parties **2.2** et **2.3** de l'exercice sont indépendantes. Dans tout l'exercice on se place dans le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j})$. On choisira pour les tracés 1 unité=2cm.

2.1 *Étude d'une courbe* Γ.

On considère la courbe de Bézier Γ définie par le polygone de contrôle $\mathbf{P} = (P_0, P_1, P_2, P_3)$ avec

$$P_0(0,0), P_1(1,0), P_2(3,3), P_3(3,0)$$

a) Donner les équations paramétriques $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ de la courbe de Bézier.

b) Faire l'étude des variations des fonctions x et y et donner le tableau de variations de γ.

c) Tracer Γ en faisant apparaître le polygone de contrôle.

2.2 *Hodographe(s) et point d'inflexion.*

Dans cette partie on s'intéresse aux points $\gamma(t_0)$ de Γ qui vérifient $\gamma''(t_0) = \vec{0}$. Pour les courbes de Bézier de degré 3 cette propriété caractérise la présence d'un point d'inflexion :

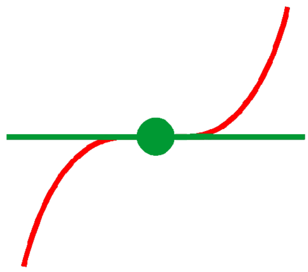

Figure 1: Point d'inflexion : la concavité de la courbe change au point d'inflexion (en quelque sorte la courbe "traverse" la tangente en ce point - c'est ce qu'il faut retenir pour l'exercice)

a) Déterminer le polygone de contrôle $\mathbf{Q}$ de g hodographe de γ.

b) Esquisser la parabole correspondant à g.

c) La parabole g intersecte l'axe (Ox) en deux points. Quels sont les points correspondants sur Γ ? Repérer ces points sur Γ (on les notera M_1 et M_2).

d) Déterminer le polygone de contrôle $\mathbf{H}$ de h hodographe de g et montrer qu'il existe t_0 tel que $h(t_0) = (0,0)$.

e) Que pouvez-vous dire du point $\gamma(t_0)$ sur Γ ? Repérer ce point sur Γ (on le notera M_3).

2.3 *Courbe déformée, aire et volume.*

On s'intéresse maintenant à la courbe $\tilde{\Gamma}$ déformée de Γ définie par le polygone de contrôle $\tilde{\mathbf{P}} = (\tilde{P}_0, \tilde{P}_1, \tilde{P}_2, \tilde{P}_3)$ avec

$$\tilde{P}_0(0,0), \tilde{P}_1(1,0), \tilde{P}_2(3,3+\varepsilon), \tilde{P}_3(3,0)$$

avec $\varepsilon > 0$.

On note $\tilde{\gamma}(t) = (X(t), Y(t))$ la nouvelle courbe de Bézier pour le polygone $\tilde{\mathbf{P}}$.

a) Expliquer sans calculs pourquoi $x(t) = X(t)$.

b) On mesure l'écart entre Γ et $\tilde{\Gamma}$ en calculant $\mathcal{A}_\varepsilon = \int_0^1 f(t)dt$ avec $f(t) = |Y(t) - y(t)|$. Que représente $\mathcal{A}_\varepsilon$ (vous pouvez expliquer avec un dessin) ?

c) Si pour tout $t \in [0,1]$ on a $Y(t) - y(t)$ de signe constant, montrer que f est polynôme dont on précisera le degré. Quelle méthode d'intégration classique donne une valeur exacte pour le calcul de $\mathcal{A}_\varepsilon$ dans ce cas ?

d) Que valent $f(0)$ et $f(1)$? Calculer $f(\frac{1}{2})$ par l'algorithme de de Casteljau (on remarquera que pour deux courbes de Bézier de degré n, $\tilde{\gamma}(t) - \gamma(t) = \sum_{i=0}^{n} B_i^n(t)(\tilde{P}_i - P_i)$, la différence peut donc se calculer à partir du polygone $\tilde{\mathbf{P}} - \mathbf{P}$).

e) Évaluer numériquement $\mathcal{A}_\varepsilon$ par la méthode proposée en **2.3.c**.

f) On se place maintenant dans l'espace $\mathcal{E}$ muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, et on considère le cylindre droit de courbe directrice Γ dans le plan (Oxy), de direction génératrice $\vec{k}$ et de hauteur 1.

f1) Donner le réseau de contrôle $\mathcal{R}$ qui permet de tracer le cylindre comme un carreau de Bézier.

f2) Quelle est la variation de volume correspondant à la déformation du cylindre si on remplace Γ par $\tilde{\Gamma}$?