FINAL MT44 Printemps 2015

Tous documents (sauf livres) et calculatrices autorisés. Les résultats intermédiaires non démontrés pourront être utilisés tout au long du devoir. Le barème prendra en compte la longueur du sujet.

UTILISER UNE COPIE PAR EXERCICE

Exercice 1 Géométrie : B-splines et hodographes

On considère le polygone de contrôle $\mathbf{Q} = (Q_0, Q_1, Q_2, Q_3)$ où les Q_i sont donnés dans le plan rapporté au repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ par les coordonnées suivantes :

$$Q_0(-1,0), Q_1(2,2), Q_2(-2,2), Q_3(1,0) \tag{1}$$

1. On considère le vecteur nœud $\tau = (0,0,0,1,2,2,2)$.

a. Combien de fonctions B-splines $B_{i,2}$ de degré 2 génère-t-on avec τ ?

b. Sur quel intervalle la fonction B-splines $B_{0,2}$ est-elle non nulle ? Esquissez l'allure de $B_{0,2}$ (vous utiliserez les résultats de la proposition 3.6 (1), (2) et (3) pour justifier votre construction).

c. Déterminer par l'algorithme de de Boor-Cox les coordonnées de $\gamma_2(1)$ où γ_2 représente la courbe B-spline associée au polygone $\mathbf{Q}$ et au vecteur nœud τ.

d. Montrer que pour tout $t \in [0,1[$ les équations paramétriques de γ_2 sont

$$\gamma_2(t) = (-5t^2 + 6t - 1; -2t^2 + 4t) \tag{2}$$

e. En déduire que γ_2 coupe une première fois l'axe des ordonnées pour $t_1 = \dfrac{1}{5}$. Quelles symétries permettent d'affirmer que γ_2 recoupe l'axe des abscisses en $t_2 = \dfrac{9}{5}$?

f. Tracer γ_2 en utilisant les propriétés des courbes B-splines de degré 2 et les informations obtenues aux questions précédentes.

2. Pour cette question on admet le résultat suivant non démontré en cours :
Soit $\tilde{\gamma}_k$ une courbe B-splines de degré k vissée aux extrémitées de polygone de contrôle $\mathbf{P} = (P_0, \ldots, P_n)$ et de vecteur nœud $\tilde{\tau} = (t_0, \ldots, t_m)$. Alors l'hodographe de $\tilde{\gamma}_k$ est une courbe B-spline γ_{k-1} de degré $k-1$, de polygone de contrôle $\mathbf{Q} = (Q_0, \ldots, Q_{n-1})$ avec $Q_i = \dfrac{1}{t_{i+k+1} - t_{i+1}}(P_{i+1} - P_i)$ et de vecteur nœud $\tau = (t_1, \ldots, t_{m-1})$. On a alors la relation fondamentale $\tilde{\gamma}_k'(t) = k\overrightarrow{O\gamma_{k-1}(t)}$

a. Justifier que l'hodographe de $\tilde{\gamma}_k$ est encore une courbe vissée aux extrémitées.

b. On considère la B-spline $\tilde{\gamma}_3$ de degré 3 de vecteur nœud $\tilde{\tau} = (0,0,0,0,1,2,2,2,2)$ et de polygone de contrôle $\mathbf{P} = (P_0, P_1, P_2, P_3, P_4)$ avec

$$P_0(0,0), P_1(-1,0), P_2(3,4), P_3(-1,8), P_4(0,8) \tag{3}$$

i. Vérifier que γ_2 est bien l'hodographe de $\tilde{\gamma}_3$.
ii. Montrer par l'algorithme de de Boor-Cox que $\tilde{\gamma}_3(1) = \frac{1}{4}P_1 + \frac{1}{2}P_2 + \frac{1}{4}P_3$.
iii. Justifier l'existence de trois tangentes verticales pour la courbe $\tilde{\gamma}_3$ (on ne demande pas de calculer les coordonnées exactes des points de tangence).
iv. Esquissez $\tilde{\gamma}_3$.

On change de copie

Exercice 2 Méthodes gaussiennes

Les deux parties de l'exercice sont indépendantes.

Partie A : Gauss-Legendre et Simpson

Le but de cette partie est d'évaluer $I = \int_{-1}^{1} \cos(x)dx$ par une méthode gaussienne et une méthode classique. L'ensemble des résultats numériques seront donnés avec 5 chiffres significatifs.

1. Quelle méthode gaussienne doit-on utiliser pour évaluer numériquement I ? Justifier votre choix.

2. Évaluer I par la méthode gaussienne de votre choix pour un support à trois points ($n + 1 = 3$). On notera I_{app}^{L} la valeur numérique obtenue.

3. Déterminer un majorant de l'erreur de méthode.

4. Calculer I et vérifier que $|I - I_{app}^{L}|$ est inférieur au majorant obtenu à la question précédente.

5. Simpson.

- **a.** Évaluer I par la méthode de Simson à 1 intervalle (on prendra donc $h = 1 - (-1) = 2$). On notera I_{app}^{S} la valeur numérique obtenue.
- **b.** Fournir un majorant de l'erreur méthodique et vérifier la cohérence des résultats obtenus.

6. Discuter les qualités des valeurs numériques I_{app}^{L} et I_{app}^{S} obtenues pour évaluer I. Dans cet exemple précis qu'est-ce qui différencie le calcul de I_{app}^{L} et I_{app}^{S} ?

Partie B : Méthode de Gauss-Martin [1]

Dans cette seconde partie on se propose de créer une méthode d'intégration originale. Soit f une fonction $\mathcal{C}^{\infty}$ sur $[0, 1]$, on cherche à évaluer de manière optimale :

$$\int_{0}^{1} f(x) \underbrace{(-\ln(x))}_{\omega(x)} dx \tag{4}$$

1. Nommée à cette occasion en l'honneur d'un grand défenseur des mathématiques comme source d'idées originales !

Pour éviter les déboires calculatoires on donne le résultat suivant valable pour tout $\alpha \geqslant 0$ (utilisable quand vous le souhaitez dans le sujet) :

$$\int_0^1 x^\alpha(-\ln(x))dx = \frac{1}{(\alpha+1)^2} \tag{5}$$

On considère sur l'espace vectoriel des fonctions polynômes $\mathcal{P}$ le crochet suivant

$$\begin{array}{rccc} \langle,\rangle : & \mathcal{P}\times\mathcal{P} & \to & \mathbb{R} \\ & (p,q) & \mapsto & \langle p,q\rangle = \displaystyle\int_0^1 p(x)q(x)(-\ln(x))dx \end{array} \tag{6}$$

1. Montrer que $\langle,\rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathcal{P}$.

2. Montrer que pour tout $p,q \in \mathbb{N}$ on a $\langle x^p, x^q\rangle = \dfrac{1}{(p+q+1)^2}$.

3. On considère le polynôme M_2 de degré 2 donné par $M_2(x) = x^2 - \dfrac{5}{7}x + \dfrac{17}{252}$.

- **a.** Vérifier que $\langle M_2, 1\rangle = 0$ et $\langle M_2, x\rangle = 0$.
- **b.** En déduire que $M_2 \perp \mathcal{P}_1$ (c'est-à-dire M_2 est orthogonal à tout polynôme de degré inférieur ou égal à 1).

4. Expliquer pourquoi si on souhaite construire une méthode à deux points pour évaluer numériquement (4), il serait judicieux de considérer le support

$$\{x_0 = \frac{5}{14} - \frac{\sqrt{106}}{42}, x_1 = \frac{5}{14} + \frac{\sqrt{106}}{42}\} \tag{7}$$

Comment doit-on alors calculer W_0 et W_1 (on ne demande pas de faire le calcul explicite) ?