FINAL MT44 Printemps 2017

Tous documents (sauf livres) et calculatrices autorisés. Les résultats intermédiaires non démontrés pourront être utilisés tout au long du devoir. Le barème prendra en compte la longueur du sujet.

UTILISER UNE COPIE PAR EXERCICE

Exercice 1 B-splines

On se place dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et on considère le vecteur noeud $\tau = (0, 0, 0, 1, 4, 4, 4)$ et le polygone de contrôle $\mathbf{P} = \{P_0(0, 0), P_1(2, 2), P_2(3, 0), P_3(4, 3)\}$.

1. Combien de fonctions B-splines $B_{i,2}$, de degré 2, peuvent être générées pour le vecteur noeud τ ? Représenter une des fonctions $B_{i,2}$ de votre choix.

2. On considère $\gamma_2(t) = \sum_i B_{i,2}(t)P_i$ pour $t \in [0, 4]$. Appliquer l'algorithme de De Boor-Cox pour calculer $\gamma_2(t)$ en fonction des P_i pour $t \in [1, 4[$. En déduire les coordonnées de $\gamma_2(1)$.

3. En utilisant les propriétés des courbes B-splines de degré 2 (que vous rappellerez), tracer soigneusement la courbe $\gamma_2([0, 4])$ pour le polygone de contrôle $\mathbf{P}$ (échelle 1u=2cm).

4. Un algorithme non-vu en cours permet de rajouter à une courbe B-spline, un noeud $\tilde{t}$ et de modifier son polygone de contrôle de sorte que la nouvelle courbe soit identique à la précédente. Plus précisémment si γ_k est une B-spline de vecteur noeud $\tau = (t_0, \dots, t_m)$ et de polygone de contrôle $\mathbf{P} = (P_0, \dots, P_n)$ alors $\tilde{\gamma}_k$ est une B-spline de vecteur noeud $\tilde{\tau} = (t_0, \dots, t_i, \tilde{t}, t_{i+1}, \dots, t_n)$ et de polygône de contrôle $\tilde{\mathbf{P}} = (\tilde{P}_0, \dots, \tilde{P}_{n+1})$ avec

$$\tilde{P}_j = \begin{cases} P_j & \text{si } t_{j+k} \leqslant \tilde{t} \\ (1 - \omega_{j,k}(\tilde{t}))P_{j-1} + \omega_{j,k}(\tilde{t})P_j & \text{si } t_j < \tilde{t} < t_{j+k} \\ P_{j-1} & \text{si } \tilde{t} \leqslant t_j \end{cases} \tag{1}$$

et dans ce cas les images $\gamma_k([t_0, t_m])$ et $\tilde{\gamma}_k([t_0, t_m])$ sont égales.

a. On veut rajouter le noeud $\tilde{t} = 2$ au vecteur noeud τ de l'exercice. Calculer le polygone modifié $\tilde{\mathbf{P}}$ et le vecteur noeud modifié $\tilde{\tau}$.

b. Tracer le polygone modifié $\tilde{\mathbf{P}}$ sur la représentation graphique de $\gamma_2([0, 4])$.

c. Sans calcul exprimer $\tilde{\gamma}_2(1)$ et $\tilde{\gamma}_2(2)$ en fonction des nouveaux points de contrôles. Justifier.

d. Quel intérêt apporte d'après vous l'insertion d'un noeud ?

Exercice 2 Gauss-Lobatto

Dans cet exercice, on étudie une méthode alternative à la méthode de Gauss-Legendre appelée méthode de Gauss-Lobatto. Comme pour Gauss-Legendre, la formule d'intégration de Gauss-Lobatto permet d'approximer, pour f continue sur $[-1, 1]$, des intégrales du type

$$I = \int_{-1}^{1} f(x)dx \tag{2}$$

La seule différence avec Gauss-Legendre est que pour la méthode de Gauss-Lobatto le premier et le dernier point de support sont fixés à $x_0 = -1$ et $x_n = 1$. En d'autres termes, le support de la méthode de Gauss-Lobatto, est, pour une intégration à $n + 1$ points, toujours de la forme $\{-1, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, 1\}$. On commence par étudier un exemple pour illustrer cette nouvelle méthode et ensuite on étudie sa performance. On notera $I^{n+1}_{Lobatto}(f)$ l'intégrale numérique approchant I par la méthode de Gauss-Lobatto.

Partie A : Comparaison entre Gauss-Legendre ($n+1=3$) et Gauss-Lobatto ($n+1=4$).

Pour la méthode de Gauss-Lobatto à 4 points, on donne les points et poids suivants :

x_0	x_1	x_2	x_3	W_0	W_1	W_2	W_3
-1	$-\sqrt{\frac{1}{5}}$	$\sqrt{\frac{1}{5}}$	1	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$

1. Rappeler comment les poids W_0, W_1, W_2 et W_3 sont calculés (on ne demande pas de faire le calcul mais de rappeler comment ces coefficients se calculent).

2. Utiliser la méthode de Gauss-Lobatto pour approcher $\int_{-1}^{1} \cos(x)dx$.

3. Comparer avec la valeur obtenue par Gauss-Legendre avec $n+1=3$ points et avec la valeur exacte I.

4. Utiliser la symétrie du support et des poids pour montrer que $I^4_{Lobatto}(x^m) = 0$ si $m = 2k+1$.

5. Calculer $I^4_{Lobatto}(x^2)$, $I^4_{Lobatto}(x^4)$ et $I^4_{Lobatto}(x^6)$.

6. Quel est l'ordre de la méthode de Gauss-Lobatto à $n+1=4$ points ?

Partie B : On note comme dans le cours (L_n) la suite des polynômes de Legendre. On rappelle que (L_n) est une base de polynômes orthogonaux pour le produit scalaire $\langle p, q\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} p(x)q(x)dx$.

Soit (Q_n) une suite de polynômes réels définis par

$$Q_{n+1} = L_{n+1} - \alpha_{n+1}L_n - \beta_{n+1}L_{n-1} \tag{3}$$

où les coefficients $\alpha_{n+1}, \beta_{n+1}$ sont choisis tels que $Q_{n+1}(1) = Q_{n+1}(-1) = 0$.

1. Quel est le degré de Q_{n+1} ?

2. Prouver que $Q_{n+1} \perp \mathcal{P}_{n-2}$ où $\mathcal{P}_k$ représente l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur à k.

3. On note par $\{-1, x_1, \ldots, x_{n-1}, 1\}$ les racines de Q_{n+1}. Ces racines sont les points de support de la formule de Gauss-Lobatto. Dans cette question on détermine l'ordre de la méthode Gauss-Lobatto. Soit $P \in \mathcal{P}_{2n-1}$ et on considère la formule

$$I^{n+1}_{Lobatto}(f) = W_0 f(-1) + W_1 f(x_1) + \ldots W_{n-1} f(x_{n-1}) + W_n f(1)$$

construite à partir du support $\{-1, x_1, \ldots, x_{n-1}, 1\}$. On considère également la division euclidienne de P par Q_{n+1}, i.e. il existe deux polynômes B et R_n tels que

$$P(x) = Q_{n+1}(x)B(x) + R_n(x) \tag{4}$$

avec $deg(R_n) \leqslant n$. Les questions suivantes ne nécessitent pas de calculs.

a. Expliquer pourquoi $I_{Lobatto}(R_n) = \int_{-1}^{1} R_n(x)dx$.

b. Quel est le degré de B ? Montrer que $\int_{-1}^{1} Q_n(x)B(x)dx = 0$.

c. En déduire que $\int_{-1}^{1} P(x)dx = \int_{-1}^{1} R(x)dx$.

d. Prouver que $I_{Lobatto}(P) = I_{Lobatto}(R_n)$.

e. Conclure que pour tout $P \in \mathcal{P}_{2n-1}$ on a $\int_{-1}^{1} P(x)dx = I_{Lobatto}(P)$. Quel est l'ordre de la méthode de Gauss-Lobatto à $n+1$ points ?

Correction

Exercice 3 B-splines

1. $m-k-1=4$
2. $\gamma_2(t)=(\frac{4-t}{4}P_1+(\frac{1-t}{3}+\frac{t}{4})P_2+\frac{t-1}{3}P_3$ donc $\gamma_2(1)=\frac{3}{4}P_1+\frac{1}{4}P_2$.
3. Représentation graphique
4. **a.** $\tilde{P}_0=P_0$, $\tilde{P}_1=P_1$, $\tilde{P}_2=\frac{1}{2}P_1+\frac{1}{2}P_2$, $\tilde{P}_3=\frac{3}{4}P_2+\frac{1}{4}P_3$, $\tilde{P}_4=P_4$.
   b. Représentation graphique
   c. $\tilde{\gamma}_2(1)=\frac{1}{2}\tilde{P}_1+\frac{1}{2}\tilde{P}_2$ et $\tilde{\gamma}_2(2)=\frac{2}{3}\tilde{P}_2+\frac{1}{3}\tilde{P}_3$.
   d. Meilleur contrôle local.

Exercice 4 Gauss-Lobatto

Partie A :

1. $W_i=\int_{-1}^1 l_i(x)dx$ où $l_i(x)=\Pi_{j=0,j\neq i}^n \dfrac{x-x_j}{x_i-x_j}$ est le $i$ème polynôme de Lagrange polynomial pour le support $\{-1,x_1,\ldots,x_{n-1},1\}$.
2. $I^4_{Lobatto}(\cos(x))=\dfrac{1}{6}\cos(-1)+\dfrac{5}{6}\cos(-\sqrt{1/5})+\dfrac{5}{6}\cos(\sqrt{1/5})+\dfrac{1}{6}\cos(1)=1.68286$.
3. On calcule $I^3_{Legendre}(\cos(x))=5/9*\cos(-\sqrt{3/5})+8/9*\cos(0)+5/9*\cos(\sqrt{3/5})=1.6830035$. Le calcul exact de I donne $I=2\sin(1)\approx 1.682941969615793$. La méthode de Gauss-Lobatto à 4 points semble meilleure que la méthode de Gausse-Legendre à 3 points
4. Par symmétrie du support par rapport à 0 il est clair que $I_{Lobbato}(x^m)=0$ lorsque $m=2k+1$.
5. $I^4_{Lobatto}(x^2)=0$, $I^4_{Lobatto}(x^4)=0$ et $I^4_{Lobatto}(x^6)\neq 0$.
6. Donc $I^4_{Lobatto}(x^m)=0$ pour $m\leqslant 5$ et $I^4_{Lobatto}=5$.

Partie B

1. $Q_4=(x^2-1)(x^2-1/5)$.
2. Q_{n+1} est de degré $n+1$ car L_{n+1} est de degré $n+1$.
3. Pour tout $P\in\mathcal{P}_{n-2}$, on a $\langle Q_{n+1},P\rangle=\langle L_{n+1}-\alpha_{n+1}L_n-\beta_{n+1}L_{n-1},P\rangle=\langle L_{n+1},P\rangle-\alpha_{n+1}\langle L_n,P\rangle-\beta_{n+1}\langle L_{n-1},P\rangle=0-\alpha_{n+1}\times 0-\beta_{n+1}\times 0=0$.
4. **a.** Car R est de degré n et qu'une méthode à $n+1$ points est toujours au moins d'ordre n.
   b. $\deg(B)\leqslant 2n-1-(n+1)=n-2$. Donc $\langle Q_{n+1},B\rangle=0$.
   c. Évident (division euclidienne)
   d. $I_{Lobatto}(P)=I_{Lobatto}R$ (car les $xi's$ sont les racines de Q_{n+1}).
   e. En regroupant les égalités précédentes il vient $\int_{-1}^1 P(x)dx=I^{n+1}_{Lobatto}(P)$, i.e. la méthode est d'ordre $2n-1$.