MT44 Printemps 2006

Examen médian du 3 mai 2006

Durée : deux heure(s)

Tout document autorisé - Calculatrice autorisée.

On rédigera les deux exercices sur deux copies différentes. On pourra admettre tout résultat intermédiaire afin de poursuivre la résolution d'un exercice.

Exercice 1 (De l'interpolation polynômiale aux splines)**.**
On considère une fonction f définie et dérivable sur un intervalle $[A, B]$ de $\mathbb{R}$.

(1) *Étude sur une partie* $[x_0, x_1]$ *de* $[A, B]$

On considère les réels x_0 et x_1 tels que $x_0 < x_1$ et $[x_0, x_1] \subset [A, B]$.
On note

$$y_0 = f(x_0); \quad y_1 = f(x_1); \quad y'_0 = f'(x_0); \quad y'_1 = f'(x_1).$$

Soit l_0 et l_1 les polynômes de Lagrange relatifs au support $\{x_0, x_1\}$.

(a) Rappeler l'expression de $l_0(x)$ et $l_1(x)$ pour tout x de $[A, B]$.

(b) Rappeler, sans calculs inutiles, les valeurs de :

$$l_0(x_0); \quad l_1(x_1); \quad l_0(x_1); \quad l_1(x_0).$$

(c) Pour tout i de $\{0, 1\}$, on pose :

$$b_i(x) = \left[1 - 2l'_i(x_i)(x - x_i)\right][l_i(x)]^2 \quad \text{et} \quad b_{2+i}(x) = (x - x_i)[l_i(x)]^2 .$$

(i) Montrer que pour tout j de $\{0, ..., 3\}$, les b_j sont des fonctions polynômes de degré 3.

(ii) Calculer pour tout j de $\{0, ..., 3\}$, les nombres dérivés $b'_j(x)$ en fonction des $l_i(x)$.

(iii) Montrer que les fonctions b_j vérifient, pour tout (i, k) de $\{0, 1\}^2$:

$$b_i(x_k) = \partial_{ik} \quad \text{et} \quad b_{2+i}(x_k) = 0 \ ;$$

$$b'_i(x_k) = 0 \quad \text{et} \quad b'_{2+i}(x_k) = \partial_{ik} \ ,$$

sachant que ∂_{ik} désigne le symbole de Kronecker.

(iv) Montrer que les $\{b_j\}_{0 \le j \le 3}$ forment base de $\mathcal{P}_3$, espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des fonctions polynômes de degré au plus 3.

(d) On considère la fonction p de $\mathcal{P}_3$ définie par :

$$p(x) = y_0 b_0(x) + y_1 b_1(x) + y_0' b_2(x) + y_1' b_3(x).$$

(i) Montrer que pour tout i de $\{0, 1\}$ on a :

$$p(x_i) = y_i \qquad \text{et} \qquad p'(x_i) = y_i'.$$

(ii) En déduire que p est le polynôme d'interpolation de f sur le support $\{x_0, x_0, x_1, x_1\}$.

(iii) Quel est son intérêt géométrique ?

(e) *Application*

On donne $f(x) = \sin(x)$, avec $x_0 = 0$ et $x_1 = \pi/2$.

(i) Déterminer le polynôme p correspondant défini ci-dessus.

(ii) Etudier sur $[x_0, x_1]$ puis représenter graphiquement dans le même repère les fonctions p et f . On fournira en particulier les tangentes aux extrémités de l'intervalle.

(2) *Généralisation*

On considère une suite $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$ de réels vérifiant $x_0 = A < x_1 < ... < x_n = B$.

Comme dans la question 1 précédente, on détermine pour tout i de $\{0, ..., n-1\}$, la fonction polynôme notée p_i définie sur $[x_i, x_{i+1}]$ qui interpole f sur le support $\{x_i, x_i, x_{i+1}, x_{i+1}\}$.

(a) Quel est l'intérêt géométrique de la fonction polynôme par morceaux, P définie par :

$$\forall x \in [A, B] \quad [(x \in [x_i, x_{i+1}]) \Rightarrow (P(x) = p_i(x))] \text{ ?}$$

(b) En utilisant la théorie développée ci-dessus, fournir un plan de détermination informatique de P, à partir de la suite $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$ et de la donnée des $(f(x_i))_{0 \leq i \leq n}$ et $(f'(x_i))_{0 \leq i \leq n}$.

Exercice 2 (Intégration numérique)**.**
Soient les intégrales

$$I_{A,B} = \int_A^B \cos\left(w^2\right) dw, \tag{1a}$$

$$J_{A,B} = \int_A^B \sin\left(w^2\right) dw. \tag{1b}$$

Le but de cet exercice est d'approcher numériquement ces deux intégrales en utilisant la méthode de Simpson.

(1) On définit les fonctions c et s de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par

$$\forall w \in \mathbb{R}, \quad c(w) = \cos\left(w^2\right), \tag{2a}$$

$$s(w) = \sin\left(w^2\right). \tag{2b}$$

(a) Calculer les quatre premières dérivées de c et de s et montrer que

$$\forall w \in \mathbb{R}, \quad \left|c^{(4)}(w)\right| \leq g(w), \tag{3a}$$

$$\left|s^{(4)}(w)\right| \leq g(w), \tag{3b}$$

où la fonction g est définie par

$$\forall w \in \mathbb{R}, \quad g(w) = 12 + 48w^2 + 16w^4. \tag{3c}$$

(b) Justifier pourquoi la fonctions g est croissante sur $\mathbb{R}_+$ et décroissante sur $\mathbb{R}_-$.

(c) Pour tout la suite, on suppose que les bornes A et B d'intégration vérifient

$$0 \leq A < B \leq 1. \tag{4}$$

Montrer que

$$\forall w \in [A, B], \quad \left|c^{(4)}(w)\right| \leq 76, \tag{5a}$$

$$\left|s^{(4)}(w)\right| \leq 76. \tag{5b}$$

(2) Pour tout entier N, on pose $h = (B - A)/N$. On considère E_N^S et F_N^S les erreurs d'intégrations respectives pour le calcul des intégrales $I_{A,B}$ et $J_{A,B}$ par la méthode d'intégration (composée) de Simpson à $N + 1$ points.

Montrer que

$$\left|E_N^S\right| \leq \frac{19}{720}(B - A)h^4, \tag{6a}$$

$$\left|F_N^S\right| \leq \frac{19}{720}(B - A)h^4. \tag{6b}$$

En déduire le nombre $N_{\min}$ garantissant une erreur d'intégration inférieure à $\varepsilon > 0$ pour les deux intégrales $I_{A,B}$ et $J_{A,B}$:

$$N_{\min} = \mathrm{E}\left(\left(\frac{19}{720\varepsilon}\right)^{1/4} (B - A)^{5/4}\right) + 1. \tag{7}$$

(3) *Applications numérique*

On donne $A = 0$, $B = 1$ et $\varepsilon = 10^{-4}$. Quelles sont les approximations numériques de $I_{A,B}$ et $J_{A,B}$?

(4) *Question facultative*

Soit P un entier non nul. On pose $\tau = 1/P$ et, pour tout $j \in \{0, ..., P\}$, $Y_j = j\tau$. Dans cette question, on souhaite déterminer des approximations de I_{0,Y_j} et J_{0,Y_j} pour $j \in \{0, ..., P\}$.

(a) Montrer que

$$I_{0,Y_0} = 0, \tag{8a}$$

$$J_{0,Y_0} = 0, \tag{8b}$$

$$\forall j \in \{1, ..., P\}, \quad I_{0,Y_j} = \sum_{k=0}^{j-1} I_{Y_k,Y_{k+1}}, \tag{8c}$$

$$\forall j \in \{1, ..., P\}, \quad J_{0,Y_j} = \sum_{k=0}^{j-1} J_{Y_k,Y_{k+1}}. \tag{8d}$$

(b) On note $e_{P,j}$ et $f_{P,j}$ les erreurs d'intégration commises pour les calculs respectifs de I_{0,Y_j} et J_{0,Y_j} en utilisant les formules (8) et où chaque intégrale $I_{Y_k,Y_{k+1}}$ et $J_{Y_k,Y_{k+1}}$ est approchée numériquement par la méthode de Simpson à $N+1$ point sur l'intervalle $[Y_k, Y_{k+1}]$.

Montrer que

$$\forall j \in \{0, ..., P\}, \quad |e_{P,j}| \leq \frac{19}{720} h^4, \tag{9a}$$

$$|f_{P,j}| \leq \frac{19}{720} h^4. \tag{9b}$$

En déduire le nombre $N_{\min}$ garantissant une erreur d'intégration inférieure à $\varepsilon > 0$ pour les deux intégrales I_{0,Y_j} et J_{0,Y_j}, pour tout $j \in \{0, ..., P\}$:

$$N_{\min} = \mathrm{E}\left(\left(\frac{19}{720\varepsilon}\right)^{1/4}\right) + 1. \tag{10}$$