MT44 Printemps 2007

Corrigé de l'examen médian du 20 avril 2007

Correction de l'exercice 1.

Cette correction faite au vu des copies insiste surtout sur les difficultés rencontrées.

(1) *Interpolation sur* $S_1 = \left\{-1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1\right\}$

(a) Il convient de noter que la solution consiste à fournir une table des différences divisées, dont le créateur indique les conventions de précision, sachant que les calculs ne sont pas tronqués de façon sauvage et recopiés tronqués de cases en cases, mais transmis par mémoire afin d'éviter toute erreur d'arrondi excessive. Fournir une table en valeurs exactes n'a pas grand sens numérique dans une uv comme MT44 ...

- Calculer numériquement n'est pas honteux !
- Fournir des valeurs exactes n'a pas de sens en pratique car des logiciels se saisiront des valeurs calculées pour déterminer un polynôme d'interpolation par exemple et ils attendront des valeurs numériques.
- Enfin, dans bon nombre d'applications, les valeurs de la fonction à interpoler ne seront pas issues de fonctions «mathématiques» mais seront des résultats de mesures, évidemment connus par leurs valeurs approchées...

On produit donc une table des valeurs approchées de exponentielle du type suivant :

x_i	$f[x_i]$	$f[\ ,\ ]$	$f[\ ,\ ,\ ]$	$f[\ ,\ ,\ ,\ ]$
-1	$0,3679$			
		$0,5230$		
$-\frac{1}{3}$	$0,7165$		$0,3717$	
		$1,019$		$0,1762$
$\frac{1}{3}$	$1,396$		$0,7240$	
		$1,984$		
1	$2,718$			

sachant que les calculs sont transférés par mémoire, sans troncature, et affichés dans la table avec quatre chiffres significatifs. On déduit de cette table, l'expression du polynôme $p_{3,1}$:

$$p_{3,1}(x) = 0,3679 + 0,5230\,(x+1) + 0,3717\,(x+1)\left(x+\frac{1}{3}\right) + 0,1762\,(x+1)\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right).$$

(b) L'expression de l'erreur est donnée en cours par :

$$e_1(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}\left(\prod_{i=0}^{3}(x-x_i)\right).$$

(c) Par suite on déduit que :

$$\forall x \in [-1,1] \quad |e_1(x)| \leq |M_1(x)| \quad \text{avec } M_1(x) = \frac{e}{24}\left(x^2-1\right)\left(x^2-\left(\frac{1}{3}\right)^2\right).$$

En effet f est invariante par dérivation, positive et croissante (puisque de dérivée positive) sur $[-1,1]$; par conséquent $\left|\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}\right|$ est majoré par $e/24$.

(2) *Interpolation sur le support* $S_2 = \left\{\cos\left(\frac{\pi}{8}\right), \cos\left(3\frac{\pi}{8}\right), \cos\left(5\frac{\pi}{8}\right), \cos\left(7\frac{\pi}{8}\right)\right\}$

(a) On laisse au lecteur le soin de représenter les deux supports (voir remarque 2 page suivante). Ce qui les différencie : S_1 est régulièrement réparti puisque les points sont équidistants, de distance $2/3$, tandis que S_2 ne l'est pas. Plus précisément, les points de S_2 sont choisis de telle sorte qu'ils «représentent» mieux les bords de l'intervalle comme le cours le suggérait en vue d'harmoniser l'amplitude de la valeur absolue de l'erreur d'interpolation sur un intervalle.

(b) L'expression est la même qu'à la question antérieure en remplaçant les points x_i par les nouveaux points X_i.

(c) L'erreur $e_2(x)$ vérifie comme antérieurement, sous les notations de l'énoncé :

$$\forall x \in [-1,1] \quad |e_2(x)| \leq |M_2(x)| \quad \text{avec} \quad M_2(x) = \frac{e}{24}\left(x^2-\alpha^2\right)\left(x^2-\beta^2\right),$$

avec

$$\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{8}\right), \quad \beta = \cos\left(3\frac{\pi}{8}\right). \tag{1}$$

Remarque 1. Il convient de noter que les expressions de $M_1(x)$ et $M_2(x)$ sont les mêmes avec des variantes quant à la valeur de α et β.

(3) *Comparaison des majorants* $|M_1|$ et $|M_2|$

(a) On étudie les variations des fonctions M_1 et M_2. Nous proposons ci-dessous une seule étude finalement tant les deux sont similaires.

- M_1 et M_2 sont définies, continues , dérivables sur $[-1,1]$ comme fonctions polynômes. Elles sont évidemment paires sur leur domaine de définition donc on les étudie seulement sur l'intervalle $[0,1]$.
- Variations

$$M_2'(x) = \frac{e}{24}\left[2x\left(x^2-\beta^2\right) + 2x\left(x^2-\alpha^2\right)\right] = \frac{ex}{6}\left[x^2 - \frac{\alpha^2+\beta^2}{2}\right].$$

On remarque, dans le cas de M_2, que vu les arguments complémentaires qui interviennent, on a :

$$\alpha^2+\beta^2 = \cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) + \cos^2\left(3\frac{\pi}{8}\right) = 1$$

Le cas de $M_1'(x)$ est exactement le même en changeant de α et β. Ainsi

$$M_1'(x) = \frac{ex}{6}\left[x^2 - \frac{(1)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2}{2}\right] = \frac{ex}{6}\left[x^2-\frac{5}{9}\right].$$

L'étude de signe est triviale puisqu'elle se ramène à l'étude de celui d'un trinôme du deuxième degré. Nous en déduisons les deux tableaux de variations suivants :

x	0		$\sqrt{\frac{\alpha^2+\beta^2}{2}}=\frac{\sqrt{5}}{3}$		1
$M_1'(x)$	0	$-$	0	$+$	
$M_1(x)$	$M_1(0)$	$\searrow$	$M_1(\frac{\sqrt{5}}{3})$	$\nearrow$	0

de même on obtient :

x	0		$\sqrt{\frac{\alpha^2+\beta^2}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$		1
$M_2'(x)$	0	$-$	0	$+$	
$M_2(x)$	$M_2(0)$	$\searrow$	$M_2(\frac{\sqrt{2}}{2})$	$\nearrow$	$M_2(1)$

On calcule des valeurs approchées des bornes prises en compte dans les tableaux précédents d'où on déduit un majorant de $|e_1(x)|$ et $|e_2(x)|$ sur l'intervalle $[-1,1]$.

(b) On constate que $|e_1(x)|$ est majoré par $m_1 = 0,0224$ sur $[-1,1]$, tandis que $|e_2(x)|$ est majoré par $m_2 = 0,0142$ sur le même intervalle, soit un rapport de 1 à 1,6 environ. Le résultat trouvé va dans le sens du résultat annoncé en cours relatif à l'effet bénéfique des points de Tchebychev qui uniformisent l'erreur d'interpolation.

Remarque 2. On pourra consulter le TP 2.C de [BM03] et faire tourner le fichier matlab `etude_support`, disponible sur le site de Dunod, `http://www.dunod.com` On choisira $a=-1$, $b=1$ et pour retrouver les données de l'exercice choisir $n=3$ (voir la figure 1). On pourra choisir des valeurs plus grandes de n (voir par exemple la figure 2 page suivante correspondant à $n=8$).

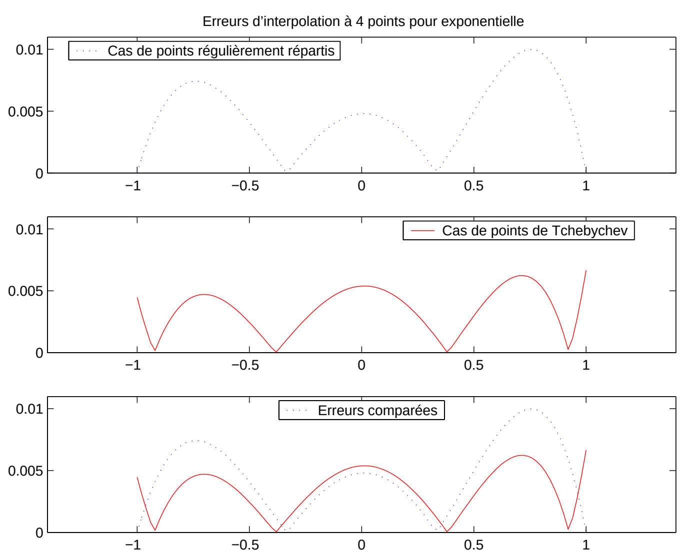

FIG. 1. cas où $n=3$.

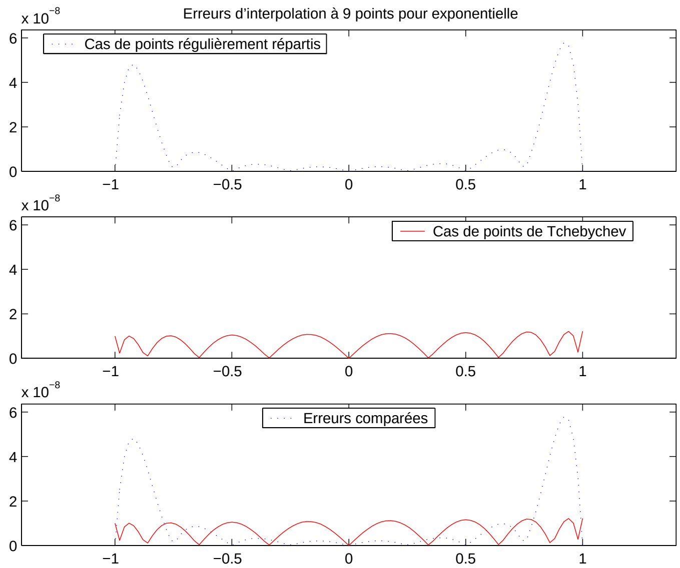

FIG. 2. cas où $n = 8$.

Correction de l'exercice 2.

(1) D'après le cours, on a pour la méthode élémentaire du trapèze

$$\boxed{I(a,b,f) = \frac{h}{2}\big(f(a) + f(b)\big),} \tag{2}$$

et

$$\boxed{E(a,b,f) = -\frac{1}{12}h^3 f^{(2)}(\xi) \text{ où } \xi \in [a,b],} \tag{3}$$

et pour la méthode élémentaire de Simpson

$$\boxed{I(a,b,f) = \frac{h}{6}\left(f(a) + f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right),} \tag{4}$$

et

$$\boxed{E(a,b,f) = -\frac{1}{2880}h^5 f^{(4)}(\xi) \text{ où } \xi \in [a,b],} \tag{5}$$

(2) (a) En appliquant la définition de la méthode élémentaire sur chacun des intervalles $[a,m]$ et $[m,b]$, avec $h/2$, il vient pour toute fonction f de classe C^k sur $[a,b]$,

$$\boxed{\int_a^m f(x)dx = I(a,m,f) + \frac{\alpha}{2^{k+1}}h^{k+1}f^{(k)}(\xi_1), \text{ où } \xi_1 \in [a,m],} \tag{6}$$

et

$$\boxed{\int_m^b f(x)dx = I(m,b,f) + \frac{\alpha}{2^{k+1}}h^{k+1}f^{(k)}(\xi_2), \text{ où } \xi_2 \in [m,b].} \tag{7}$$

(b) Soit C un réel quelconque. On fait la somme de

$$\int_a^b f(x)dx = I(a,b,f) + \alpha h^{k+1}f^{(k)}(\xi) \text{ où } \xi \in [a,b], \tag{8}$$

de l'équation (6) multipliée par C et de l'équation (7) multipliée par C. Il vient donc

$$(1+C)\int_a^b f(x)dx = I(a,b,f) + CI(a,m,f) + CI(m,b,f) \\ + \alpha h^{k+1} f^{(k)}(\xi) + C\frac{\alpha}{2^{k+1}}h^{k+1}f^{(k)}(\xi_1) + C\frac{\alpha}{2^{k+1}}h^{k+1}f^{(k)}(\xi_2). \quad (9)$$

D'autre part, d'après la formule de Taylor-Lagrange, on a

$$f^{(k)}(\xi) = f^k(a) + (\xi - a)f^{(k+1)}(\eta) \text{ où } \xi[a,b], \quad (10a)$$

$$f^{(k)}(\xi_1) = f^k(a) + (\xi_1 - a)f^{(k+1)}(\eta_1) \text{ où } \eta_1 \in [a,b], \quad (10b)$$

$$f^{(k)}(\xi_2) = f^k(a) + (\xi_2 - a)f^{(k+1)}(\eta_2) \text{ où } \eta_2 \in [a,b]. \quad (10c)$$

Si

$$1 + C \neq 0, \quad (11)$$

alors, on peut déduire de (9) et (10) que

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{1+C}\big(I(a,b,f) + CI(a,m,f) + CI(m,b,f)\big) + \frac{\alpha}{1+C}h^{k+1}f^k(a)\left(1 + \frac{C}{2^k}\right) \\ + \frac{\alpha}{1+C}h^{k+1}\left((\xi - a)f^{(k+1)}(\eta) + \frac{C}{2^{k+1}}(\xi_1 - a)f^{(k+1)}(\eta_1) + \frac{C}{2^{k+1}}(\xi_2 - a)f^{(k+1)}(\eta_1)\right). \quad (12)$$

En choisissant

$$C = -2^k, \quad (13)$$

on s'assure que (11) est vérifié et que, dans (12), le terme en $h^{k+1}f^k(a)$ disparaît. On a donc

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \widetilde{I}(a,b,f) + \widetilde{E}(a,b,f),} \quad (14)$$

où

$$\boxed{\widetilde{I}(a,b,f) = \frac{1}{1+C}\Big(I(a,b,f) + C\big(I(a,m,f) + I(m,b,f)\big)\Big).} \quad (15)$$

Enfin, selon (12), on a donc, puisque $|\xi - a| \leq h$, $|\xi_1 - a| \leq h$ et $|\xi_2 - a| \leq h$:

$$\left|\widetilde{E}(a,b,f)\right| \leq \frac{|\alpha|}{|1+C|}h^{k+1}\sup_{x\in[a,b]}\left|f^{(k+1)}(x)\right|\left(h + \frac{h}{2} + \frac{h}{2}\right) = 2\frac{|\alpha|}{|1+C|}h^{k+2}\sup_{x\in[a,b]}\left|f^{(k+1)}(x)\right|,$$

soit encore

$$\boxed{\left|\widetilde{E}(a,b,f)\right| \leq \beta h^{k+2}\sup_{x\in[a,b]}\left|f^{(k+1)}(x)\right|,} \quad (16)$$

où β est indépendant de f.

(c) La nouvelle expression $\widetilde{E}(a,b,f)$ représente l'erreur commise. La nouvelle approximation de $\int_a^b f$ définie par (14) et (15) est plus précise que l'approximation de $I(a,b,f)$ à partir de (8) : en effet, nous sommes passés d'une erreur en $\mathcal{O}(h^{k+1})$ (voir (8)) à une erreur en $\mathcal{O}(h^{k+2})$ (voir (16)).

(3) (a) Pour la méthode du trapèze (cf. (2) et (3)), on a $k=2$. Selon (15), avec $C=-2^k=-4$ et $m=(a+b)/2$ nous obtenons

$$\widetilde{I}(a,b,f) = \frac{1}{1+C}\Big(I(a,b,f)+C\big(I(a,m,f)+I(m,b,f)\big)\Big)$$
$$= -\frac{1}{3}\left(\frac{h}{2}\big(f(a)+f(b)\big)-4\times\frac{h}{4}\Big(\big(f(a)+f(m)\big)+\big(f(m)+f(b)\big)\Big)\right).$$

On obtient donc

$$\boxed{k=2 \text{ et } \widetilde{I}(a,b,f)=\frac{h}{6}\left(f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right).} \tag{17}$$

De même, pour la méthode de Simpson (cf. (4) et (5)), on a $k=4$, $C=-16$ et, en posant $m=(a+b)/2$, $m_0=(a+m_1)/2$ et $m_2=(m_1+b)/2$, il vient

$$\widetilde{I}(a,b,f) = \frac{1}{1+C}\Big(I(a,b,f)+C\big(I(a,m,f)+I(m,b,f)\big)\Big)$$
$$= -\frac{1}{15}\left(\frac{h}{6}\big(f(a)+4f(m)+f(b)\big)-16\times\frac{h}{12}\Big(\big(f(a)+f(m_0)+f(m)\big)+\big(f(m)+f(m_2)+f(b)\big)\Big)\right).$$

On obtient donc

$$\boxed{k=4 \text{ et } \widetilde{I}(a,b,f)=\frac{h}{90}\left(7f(a)+32f\left(a+\frac{h}{4}\right)+12f\left(a+\frac{h}{2}\right)+32f\left(a+\frac{3h}{4}\right)+7f(b)\right).} \tag{18}$$

(b) Dans la méthode (17), on reconnaît la méthode de Simpson. La théorie prévoit une majoration d'erreur du type : pour toute fonction de classe C^4,

$$\boxed{\left|\widetilde{E}(a,b,f)\right| \leq \beta h^5 \sup_{x\in[a,b]}\left|f^{(4)}(x)\right|,} \tag{19}$$

plus précise que (16) avec $k=2$.

Cela n'est pas contradictoire : l'amélioration de la méthode prévoit une majoration du type (16) avec $k=2$; en réalité, l'erreur est encore plus faible et (16) avec $k=2$ est trop pessimiste. En fait, dans la méthode de Simpson, l'un des point «compte double» ce qui explique ce pessimisme !

(4) On étudie maintenant la méthode :

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n} W_i f(x_i) + E_n(a,b,f). \tag{20}$$

(a) La méthode (18) est bien une méthode du type (20) avec $n=4$, $x_i=a+ih/4$ et

$$\boxed{W_0=\frac{7}{90}h,\quad W_1=\frac{16}{45}h,\quad W_2=\frac{2}{15}h,\quad W_3=\frac{16}{45}h,\quad W_4=\frac{7}{90}h.} \tag{21}$$

(b) Selon (16) avec $k=4$, on a

$$|E_4(a,b,f)| \leq \beta h^6 \sup_{x\in[a,b]}\left|f^{(5)}(x)\right|. \tag{22}$$

Si f est un polynôme de degré au plus 4, est nul est l'erreur commise est nulle.

$$\boxed{\text{L'ordre de la méthode (18) est donc au moins égal à 4.}} \tag{23}$$

(c) La méthode (20) est linéaire par rapport à f, ainsi que l'intégrale de f. Tout polynôme de degré 5 est la somme de $x \mapsto ax^5$ et d'un polynôme de degré 4. D'après (23), l'erreur commise pour un polynôme de degré 4 est nulle. Il suffit donc d'étudier l'erreur commise pour $p : x \mapsto x^5$.

Si on suppose que $a = -1$ et $b = 1$, alors p est impair et d'intégrale nulle. De même, par symétrie, on a, avec $h = 2$

$$\begin{aligned} I(-1,1,p) &= \frac{2}{90}\left(7p(-1) + 32p\left(-\frac{1}{2}\right) + 12p\left(0\right) + 32p\left(\frac{1}{2}\right) + 7p(1)\right) \\ &= \left(12p\left(0\right) + 7\left(p(-1) + p(1)\right) + 32\left(p\left(-\frac{1}{2}\right) + p\left(\frac{1}{2}\right)\right)\right) = 0. \end{aligned}$$

Ainsi, l'erreur commise est égale à $0 - 0 = 0$ et

$$\boxed{\text{l'ordre de la méthode (18) est donc au moins égal à 5.}} \tag{24}$$

Remarque 3. Les méthodes (20) correspondant à $x_i = a + hi/n$ pour $i \in \{0, ..., n\}$ sont appelées les méthodes de Newton-Cotes (fermées). En cours, ont déjà été étudiés les cas particuliers suivants des formules Newton-Cotes fermées :

- $n = 0$ correspond à la la méthode du rectangle (d'ordre 0) ;
- $n = 1$ correspond à la la méthode du trapèze(d'ordre 1) ;
- $n = 2$ correspond à la la méthode de Simpson (d'ordre 4).

La formule pour $n = 4$ correspond à la la méthode de Boole-Villarceau (appelée ici méthode de Simpson modifiée, voir (18)).

On peut montrer (voir chapitre 2 de [CM89]) que toute méthode de Newton-Cotes fermée à $n+1$ (avec n non nul) points de support est d'ordre n si n est impair et d'ordre $n+1$ si n est pair. On peut donc être plus précis que (24) : L'ordre de la méthode (18) est donc exactement égal à 5, c'est-à-dire que l'erreur est non nulle pour un polynôme de degré 6.

(d) On a vu précédemment que la méthode (18) est d'ordre 4 puisque la majoration (22) a lieu. En fait, l'ordre est 5 et on peut donc supputer que la majoration est valable à un ordre supérieur (22), c'est-à-dire : pour toute fonction de classe C^5,

$$\boxed{|E_4(a,b,f)| \leq \gamma h^7 \sup_{x\in[a,b]} \left|f^{(6)}(x)\right|.} \tag{25}$$

Remarque 4. Soit les deux assertions suivantes :

$$\text{La formule de quadrature (20) est d'ordre } m. \tag{26}$$

et

Il existe $\alpha \geq 0$ tel que, pour toute fonction $f \in C^{m+1}[a,b]$,

$$|E_n(a,b,f)| \leq \alpha h^{m+2} \sup_{x\in[a,b]} \left|f^{(m+1)}(x)\right|. \tag{27}$$

Il est clair que (27) implique (26). La réciproque est plus difficile à montrer. *Grosso modo*, c'est la réciproque (admise) que l'on a utilisé à la question 4d. On pourra consulter le sujet de médian de l'UV MT40 (Automne 2003), disponible sur `http://utbmjb.chez-alice.fr/`

(e) Comme dans le cours, on écrit que l'intégrale approchée correspondant à la méthode composée sur l'intervalle $[A, B]$ associée à la méthode élémentaire (18) est la somme des intégrales approchées élémentaires sur chacun des intervalles $[x_i, x_{i+1}]$:

$$\begin{aligned}\int_A^B f(x)dx &\approx \sum_{i=0}^{N-1} \widetilde{I}(a,b,f)\\ &= \sum_{i=0}^{N-1} \frac{h}{90}\left(7f(x_i) + 32f\left(x_i+\frac{h}{4}\right) + 12f\left(x_i+\frac{h}{2}\right) + 32f\left(x_i+\frac{3h}{4}\right) + 7f(x_{i+1})\right).\end{aligned}$$

On regroupe

- le terme $f(A) = f(x_0)$ qui intervient une fois ;
- le terme $f(B) = f(x_N)$ qui intervient une fois ;
- les termes $f(x_i)$ qui intervient $2(N-1)$ fois ;
- chacun des termes $f\left(x_i + h/4\right)$, $f\left(x_i + h/2\right)$ et $f\left(x_i + 3h/4\right)$ qui interviennent N fois.

On a donc

$$\begin{aligned}\int_A^B f(x)dx \approx \frac{h}{90}\Bigg(&7\big(f(A)+f(B)\big) + 14\sum_{i=1}^{N-1} f\left(x_i\right)\\ &+ 32\sum_{i=0}^{N-1} f\left(x_i+\frac{h}{4}\right) + 32\sum_{i=0}^{N-1} f\left(x_i+\frac{3h}{4}\right) + 12\sum_{i=0}^{N-1} f\left(x_i+\frac{h}{2}\right)\Bigg).\end{aligned} \tag{28}$$

Références

[BM03] Jérôme Bastien et Jean-Noël Martin. *Introduction à l'analyse numérique ; applications sous matlab*. Dunod, Paris, 2003.

[CM89] M. Crouzeix et A. L. Mignot. *Analyse numérique des équations différentielles*. Masson, Paris, 1989.