MT44 Printemps 2007

Examen médian du 20 avril 2007

Durée : deux heure(s)

Tout document autorisé - Calculatrice autorisée.

On pourra admettre tout résultat intermédiaire afin de poursuivre la résolution d'un exercice.

Exercice 1 (Interpolation)**.**
Soit f la fonction définie sur $[-1,1]$ par $f(x) = e^x$.

(1) *Interpolation sur le support* $S_1 = \left\{-1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1\right\}$

(a) Déterminer la fonction polynôme $p_{3,1}$ qui interpole f sur $\left\{-1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1\right\}$.

(b) Rappeler l'expression de l'erreur d'interpolation $e_1(x) = f(x) - p_{3,1}(x)$, pour tout x de $[-1,1]$, fournie en cours.

(c) Montrer que :

$$\forall x \in [-1,1] \quad |e_1(x)| \leq M_1(x) = \frac{e}{24}\left(x^2-1\right)\left(x^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2\right).$$

(2) *Interpolation sur le support* $S_2 = \left\{\cos\left(\frac{\pi}{8}\right), \cos\left(3\frac{\pi}{8}\right), \cos\left(5\frac{\pi}{8}\right), \cos\left(7\frac{\pi}{8}\right)\right\}$

(a) Représenter graphiquement les supports S_1 et S_2. Qu'est-ce qui les différencie dans leur manière de partitionner $[-1,1]$?

(b) Sans déterminer la fonction polynôme $p_{3,2}$ qui interpole f sur S_2, rappeler l'expression de l'erreur d'interpolation $e_2(x) = f(x) - p_{3,2}(x)$, pour tout x de $[-1,1]$, fournie en cours.

(c) Montrer que :

$$\forall x \in [-1,1] \quad |e_2(x)| \leq M_2(x) = \frac{e}{24}\left(x^2-\alpha^2\right)\left(x^2-\beta^2\right),$$

où α et β sont définis par : $\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\beta = \cos\left(3\frac{\pi}{8}\right)$.

(3) *Comparaison des majorants* M_1 *et* M_2

(a) Etudier les variations de M_1 *et* M_2 sur $[-1,1]$.

(b) Interprétez les résultats obtenus ; le cours laissait-il attendre ces résultats ?

Exercice 2 (Intégration numérique)**.**
Soient k un entier naturel non nul et f de classe C^k sur l'intervalle $[a, b]$. Pour tout cet exercice, on pose

$$h = b - a. \tag{1}$$

On suppose que l'on connaît une formule d'intégration élémentaire de f sur $[a, b]$ sous la forme

$$\int_a^b f(x)dx = I(a, b, f) + E(a, b, f), \tag{2}$$

où $I(a, b, f)$ est la valeur approchée de l'intégrale et $E(a, b, f)$ l'erreur commise. On supposera de plus l'erreur vérifie : il existe une constante α telle que pour toute fonction f de classe C^k, on a :

$$E(a, b, f) = \alpha h^{k+1} f^{(k)}(\xi) \text{ où } \xi \in [a, b]. \tag{3}$$

(1) Rappeler les expressions de $I(a, b, f)$ et $E(a, b, f)$ (sous la forme (3)) pour les méthodes élémentaires du trapèze et de Simpson.

(2) Dans cette question, on cherche à trouver une méthode d'intégration élémentaire plus précise que la méthode (2). Soit

$$m = \frac{a + b}{2}, \tag{4}$$

(a) Montrer que, pour toute fonction f de classe C^k sur $[a, b]$, on a

$$\int_a^m f(x)dx = I(a, m, f) + \frac{\alpha}{2^{k+1}} h^{k+1} f^{(k)}(\xi_1), \text{ où } \xi_1 \in [a, m], \tag{5}$$

et

$$\int_m^b f(x)dx = I(m, b, f) + \frac{\alpha}{2^{k+1}} h^{k+1} f^{(k)}(\xi_2), \text{ où } \xi_2 \in [m, b]. \tag{6}$$

(b) En déduire que, si on choisit C vérifiant

$$C = -2^k, \tag{7}$$

alors, il existe un réel β tel que, pour toute fonction f de classe C^{k+1} sur $[a, b]$, on ait :

$$\int_a^b f(x)dx = \widetilde{I}(a, b, f) + \widetilde{E}(a, b, f), \tag{8}$$

où

$$\widetilde{I}(a, b, f) = \frac{1}{1 + C}\Big(I(a, b, f) + C\big(I(a, m, f) + I(m, b, f)\big)\Big), \tag{9}$$

et

$$\left|\widetilde{E}(a, b, f)\right| \leq \beta h^{k+2} \sup_{x \in [a,b]} \left|f^{(k+1)}(x)\right|. \tag{10}$$

On fera une combinaison linéaire des équations (2), (5) et (6) et on écrira

$$f^{(k)}(\xi) = f^k(a) + (\xi - a) f^{k+1}(\eta) \text{ où } \xi[a, b],$$
$$f^{(k)}(\xi_1) = f^k(a) + (\xi_1 - a) f^{k+1}(\eta_1) \text{ où } \eta_1 \in [a, b],$$
$$f^{(k)}(\xi_2) = f^k(a) + (\xi_2 - a) f^{k+1}(\eta_2) \text{ où } \eta_2 \in [a, b].$$

(c) Nous avons donc une nouvelle approximation de $\int_a^b f$ définie par (8) et (9). Cette nouvelle approximation est définie à partir de l'approximation $I(a,b,f)$.

Que représente la nouvelle expression $\widetilde{E}(a,b,f)$ et quel est l'avantage de (10) par rapport à (3) ?

(3) (a) En reprenant les résultats de la question 1, montrer que, si on part de la méthode du trapèze, alors on a :

$$k = 2 \text{ et } \widetilde{I}(a,b,f) = \frac{h}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right), \tag{11}$$

et que, si on part de la méthode de Simpson, alors on a :

$$k = 4 \text{ et } \widetilde{I}(a,b,f) = \frac{h}{90}\left(7f(a) + 32f\left(a + \frac{h}{4}\right) + 12f\left(a + \frac{h}{2}\right) + 32f\left(a + \frac{3h}{4}\right) + 7f(b)\right). \tag{12}$$

(b) Que reconnaissez-vous dans la méthode (11) ? La majoration (10) est-elle alors cohérente avec celle vue en cours ?

(4) *Question facultative*

Soit la méthode de quadrature élémentaire suivante :

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n} W_i f(x_i) + E_n(a,b,f), \tag{13}$$

où $(W_i)_{0\leq i\leq n}$ sont $n+1$ réels, $(x_i)_{0\leq i\leq n}$ sont $n+1$ réels deux à deux distincts de $[a,b]$ et $E_n(a,b,f)$ est l'erreur commise.

Nous disons ici qu'une méthode élémentaire de quadrature du type (13) est dite d'ordre m si elle est exacte (c'est-à-dire si $E_n(a,b,f) = 0$) pour tout polynôme de degré au plus m.

(a) Pourquoi la méthode (12) est elle une méthode de quadrature du type (13) ?

(b) *A priori*, quel est l'ordre de cette méthode ?

(c) Montrer que la méthode (12) est d'ordre 5. Pour cela, on pourra supposer, pour simplifier[1] que $a = -1$ et que $b = 1$. Pour montrer que l'erreur est nulle pour un polynôme de degré 5, on montrera qu'il suffit d'étudier l'erreur commise pour $x \mapsto x^5$ et on raisonnera par symétrie, sans faire aucun calcul.

(d) Quel type de majoration similaire à (10)(avec $k = 4$) peut on supputer ?

(e) On pose, pour tout couple de réel $A < B$ et pour tout entier non nul N,

$$x_0 = A; \quad x_N = B; \quad \forall i \in \{0, ..., N\}, \quad x_i = A + ih, \text{ où } h = \frac{B-A}{N}. \tag{14}$$

[1] En fait, on peut montrer que les calculs fait sont équivalents.

Montrer que la méthode composée sur l'intervalle $[A, B]$ associée à la méthode élémentaire (12) s'écrit :

$$\int_A^B f(x)dx \approx \frac{h}{90}\Bigg(k_1\big(f(A)+f(B)\big)+k_2\sum_{i=1}^{N-1} f\left(x_i\right) + k_3\sum_{i=0}^{N-1} f\left(x_i+\frac{h}{4}\right)+k_4\sum_{i=0}^{N-1} f\left(x_i+\frac{3h}{4}\right)+k_5\sum_{i=0}^{N-1} f\left(x_i+\frac{h}{2}\right)\Bigg), \quad (15)$$

où k_1, k_2, k_3, k_4 et k_5, sont des réels à déterminer.