Nb : Les deux exercices seront rédigés sur des feuilles séparées.

Exercice 1 *Interpolation polynômiale*

Nb : On change de feuille, svp.

Soit f une fonction numérique de classe C^3 sur $[a, b]$. Soit t un réel donné de $]a, b[$ et h élément de $\mathbb{R}^{+*}$ tels que :

$$x_0 = t - h, \;\; x_1 = t, \;\; \text{et} \;\; x_2 = t + h$$

soient éléments de $[a, b]$; on note respectivement y_0, y_1, y_2 les images $f(x_0)$, $f(x_1)$, $f(x_2)$.

1.1 On considère le polynôme p_2 qui interpole f sur $\{x_0, x_1, x_2\}$.

a) Ecrire $p_2(x)$ en fonction de x, t, h, et y_0, y_1, y_2.

b) Déterminer le nombre dérivé $p_2'(x)$. En déduire $p_2'(t)$ en fonction de h et y_0, y_1, y_2. Interpréter géométriquement le résultat.

1.2 *Etude d'un exemple*

On adopte les notations antérieures et on donne pour cette seule sous question :

$$f = \sin; \quad a = 0; b = \frac{\pi}{2}; t = \frac{\pi}{4}; h = 0,1.$$

a) Ecrire $p_2(x)$ en fonction de x, t, h, et y_0, y_1, y_2.

Nb : Les calculs seront menés avec soin, avec toute la précision de la machine, mais l'affichage sera fourni avec arrondi à la quatrième décimale.

b) Déterminer le nombre dérivé $p_2'(x)$. En déduire $p_2'(t)$ en fonction de h et y_0, y_1, y_2.

c) Comparer $f'(t)$ et $p_2'(t)$ pour cette valeur particulière de t.

1.3 *Expression approchée du nombre dérivé*

a) Montrer que pour tout x convenable, on peut écrire :

$$f(x) = p_2(x) + r_1(x)r_2(x) \quad \text{avec } r_1(x) = f[x_0, x_1, x_2, x] \text{ et } r_2(x) = \prod_{j=0}^{2} (x - x_j)\,.$$

b) En déduire que si on approche $f'(t)$ par $p_2'(t)$, on commet une erreur de méthode. Quelle est-elle ?

1.4 *Etude de l'erreur de méthode*

On pose :

$$E(t) = E_1(t) + E_2(t) \quad \text{avec } E_1(t) = r_1'(t)r_2(t) \text{ et } E_2(t) = r_1(t)r_2'(t).$$

a) Montrer que $E_1(t) = 0$.

Nb : on se propose désormais de majorer la valeur absolue de l'erreur de méthode commise.

b) *Majoration de $|r_1(t)|$*

Montrer qu'il existe un réel M_3 à préciser tel que : $|r_1(t)| \leq M_3/6$.

.../...

c) *Calcul de* $|r_2'(t)|$

- Montrer que pour tous x et t convenables :

$$r_2(x) = (x-t)\left[(x-t)^2 - h^2\right].$$

- En déduire, en évitant tout calcul inutile, que :

$$r_2'(t) = -h^2.$$

- Fournir une majoration de $|E(t)|$ pour tout t de $]a, b[$.

d) Commenter au vu des calculs, le résultat de la question 1.2 c).

2.5 Faire le bilan de la méthode proposée. Comment pourriez-vous la généraliser?

Exercice 2 *Géométrie*

Nb : On change de feuille, svp.

On rapporte le plan à un repère orthonormé direct $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.

2.1 On considère la courbe de Bézier cubique (G) de polygone de contrôle $Q = (Q_0, Q_1, Q_2, Q_3)$ et on note g la fonction vectorielle associée. On donne Q par :

$$Q_0\,(-1,-1)\,;\ Q_1\,(2,a)\,;\ Q_2\,(-2,a)\,;\ Q_3\,(1,-1)\,.$$

a) Etablir les équations paramétriques de la courbe (G).

b) Etudier les variations de g.

c) Montrer que pour $a = 4/3$ la courbe (G) admet un point double à l'origine.

Nb : On montrera qu'il existe $t_1 \neq t_2$ tels que $g(t_1) = g(t_2) = (0,0)$ et on déterminera les éléments t_1 et t_2 de $[0,1]$.

d) Tracer précisément la courbe (G) pour $a = 4/3$.

2.2 On souhaite construire une courbe de Bézier (Γ) de degré 4, de fonction vectorielle associée γ, possédant deux points de rebroussement, aussi appelés points cusp. On rappelle qu'une condition suffisante pour avoir un tel point en t_0 est que $\gamma(t_0) = (0,0)$ et $\gamma'(t_0) \neq (0,0)$.

a) Rappeler comment on associe à (Γ) définie par γ la courbe de Bézier (G) de degré 3 définie par la fonction vectorielle $g = \gamma'$, à une homothétie près.

b) Si on suppose que (Γ) admet deux points cusp, que peut-on dire de g ?

c) Construire le polygone de contrôle $P = (P_0, P_1, P_2, P_3, P_4)$ de (Γ).

d) Sans déterminer les équations de la courbe (Γ), positionner les points cusp de (Γ) et esquisser la courbe à partir du polygone de contrôle.

Nb : On prendra une échelle suffisamment grande (1 unité=5 cm). On prendra comme valeur approchée pour t_1 et t_2 : $t_1 \approx 1/5$ et $t_2 \approx 4/5$ et on laissera les traits de construction apparents.

2.3 Peut-on construire une courbe de Bèzier de degré 4 avec plus de deux points cusp ?