Nb : Les deux exercices seront rédigés sur des feuilles séparées.

Exercice 1 *Interpolation polynômiale*

Nb : On change de feuille, svp.

Soit n de $\mathbf{N}^*$, x_0 de $\mathbb{R}$ et h de $\mathbb{R}^{+*}$donnés. On note $\mathcal{P}_3$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des fonctions polynômes de degré au plus trois et $(f_k)_{0\leq k\leq 3}$ sa base canonique.

1.1 Soit Δ l'application de $\mathcal{P}_3$ dans $\mathcal{P}_3$ définie par :

$\forall p \in \mathcal{P}_3 \qquad \Delta(p) = q$ avec $\forall x \in \mathbb{R} \qquad q(x) = p(x+h) - p(x)$.

De plus, pour tout i de $\mathbf{N}$, on définit Δ^i par :

$$\Delta^0 = id \quad \text{et} \quad \Delta^i = \Delta \circ \Delta^{i-1} \text{ si } i\rangle 0.$$

a) Montrer que Δ est une application linéaire, c'est-à-dire:

$$\forall (p,q) \in \mathcal{P}_3^2 \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R} \qquad \Delta(p+q) = \Delta(p) + \Delta(q) \text{ et } \Delta(\lambda.p) = \lambda\Delta(p).$$

b) Que dire de Δ^i ?

c) Déterminer l'image par Δ de la base $(f_k)_{0\leq k\leq 3}$.

1.2 Soit p une fonction quelconque de $\mathcal{P}_3$.

a) Montrer que $\Delta^3(p)$ est une fonction constante.

b) On pose pour tout j de $\mathbf{N}$: $x_j = x_0 + jh$ et on suppose connaître les valeurs de p en x_0, x_1, x_2, x_3.

- Déterminer en fonction des $p(x_i)$ le vecteur $(d\,[i])_{0\leq i\leq 3}$ avec $d\,[i] = \left(\Delta^i(p)\right)(x_0)$.
- Montrer que pour tout couple (i,j) de $\{0,1,2,3\} \times \mathbf{N}^*$on a :

$$\left(\Delta^i(p)\right)(x_j) = \left(\Delta^i(p)\right)(x_{j-1}) + \left(\Delta^{i+1}(p)\right)(x_{j-1}).$$

NB:On cherchera à voir comment se construit la "table " (a_{ij}) avec $a_{ij} = \left(\Delta^i(p)\right)(x_j)$, en précisant l'ordre de "remplissage" des cellules.

1.3 Application

On donne p par $p(x) = 3x^3 + 2x^2 + x + 1; \quad h = 1; \quad x_0 = 0$.

Construire la table (a_{ij}) et en déduire $p(4)$ puis $p(5)$.

1.4 Sous les notations et hypothèses antérieures

a) Ecrire un algorithme *valeur* $(d, k \to val)$ qui à partir du vecteur d des quatre valeurs $d\,[i] = \left(\Delta^i(p)\right)(x_0)$, fournit le vecteur val des k valeurs de la fonction polynôme p en les réels $x_{3+1}, x_{3+2}, ..., x_{3+k}$.

b) Quel est son intérêt?

c) Evaluer l'ordre de grandeur du temps d'exécution de cet algorithme.

.../...

Exercice 2 *Géométrie : point d'inflexion*

Nb : On change de feuille, svp.

On rapporte le plan affine à un repère orthonormé direct $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.

2.1 On considère le polygone de contrôle **P**$= \{P_0, P_1, P_2, P_3\}$. On donne **P** par :

$$P_0\,(0,0)\,;\ P_1\,(1,-1)\,;\ P_2\,(3,0)\,;\ P_3\,(6,1)\,.$$

a) Etablir les équations paramétriques de la courbe (γ) définie par le polygone **P** et faire l'étude de la courbe.

b) Montrer que le point $M_{\frac{1}{2}} = \gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ est un point d'inflexion de la courbe.

Nb Pour cela on montrera que $\gamma'\left(\frac{1}{2}\right)$ et $\gamma"\left(\frac{1}{2}\right)$ sont colinéaires, mais que $\gamma'\left(\frac{1}{2}\right)$ et $\gamma'''\left(\frac{1}{2}\right)$ ne le sont pas.

c) Placer dans le plan les points du polygone de contrôle **P** et construire par l'algorithme de De Casteljau le point $\gamma\left(\frac{1}{2}\right)$

Nb : On laissera apparents les traits de construction.

d) Faire un tracé précis de la courbe (γ).

2.2 On considère g la courbe de Bézier de degré 2 définie par le polygone de contrôle **Q**$= \{Q_0, Q_1, Q_2\}$ avec $Q_0\,(-1,1)$, $Q_1\,(2,1)$ et $Q_2\,(3,-1)$.

a) Expliquer en quoi la courbe g donne des informations sur la courbe γ'.

b) Calculer les coordonnées du point $g\left(\frac{1}{2}\right)$, qui sera noté $N_{\frac{1}{2}}$, en appliquant l'algorithme de De Casteljau.

c) Esquisser la courbe g.

d) Montrer que la tangente à la courbe en $N_{\frac{1}{2}}$ passe par l'origine O du repère. En déduire que les vecteurs $\overrightarrow{ON_{\frac{1}{2}}}$ et $g'\left(\frac{1}{2}\right)$ sont colinéaires.

e) Pourquoi ce résultat était-il prévisible ?

2.3 Construire une parabole admettant deux tangentes passant par l'origine.

Nb : On pourra construire dans l'ordre : une parabole, deux tangentes et l'origine...

En déduire le polygone de contrôle d'une Bézier cubique admettant deux points d'inflexion.

2.4 Hors barême

Ecrire un algorithme qui, étant donné le polygone de contrôle **P**$= \{P_0, P_1, P_2, P_3\}$ d'une Bézier cubique et une valeur $t_0 \in [0,1]$, détermine si la courbe possède un point d'inflexion pour $t = t_0$. En déterminer la complexité.