Utbm mt44 **Médian Printemps 2012** **Durée : 2 heures**

Nb : Les deux exercices seront rédigés sur des feuilles séparées.

Exercice 1 *Interpolation polynômiale*

Nb : On change de feuille, svp.

L'objet de l'exercice est d'étudier la qualité globale d'une interpolation polynômiale sur un intervalle.

On considère la fonction polynôme f définie sur $[-1,1]$ par: $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$. Pour tout l'exercice h désigne un réel donné de l'intervalle $]0,1]$.

1.1 *Interpolation polynômiale sur le support* $\{-h, 0, h\}$

a) Déterminer le polynôme d'interpolation p_2 de f sur le support $\{-h, 0, h\}$.

b) Fournir l'écriture explicite, en fonction de h et de x, de l'écart au point x entre f et p_2, noté $d(x)$, défini par: $d(x) = f(x) - p_2(x)$.

c) Vérifier que l'expression de $d(x)$ est cohérente avec la définition des objets considérés et montrer que d est impaire sur $[-1,1]$.

d) *Application numérique*

Fournir l'expression de $d(x)$ pour $h = 1/2$ puis pour $h = 1$.

1.2 *Etude de la qualité de l'interpolation sur* $[-1,1]$ en fonction de h

a) *Outils techniques*

a1) Etudier le signe sur $[-1,1]$ de $d(x)$.

a2) Etudier les variations de la fonction d sur $[-1,1]$.

b) Déduire de la question a1), l'expression sur $[-1,1]$ de $e_1(x)$ définie par: $e_1(x) = |d(x)|$ en fonction de $d(x)$.

c) En déduire que e_1 est une fonction polynôme par morceaux sur $[-1,1]$. Est-elle dérivable sur $[-1,1]$?

d) Sans faire une étude complète de e_1 sur $[-1,1]$, en utilisant la question a2), montrer que:

$$\forall x \in [-1,1] \quad e_1(x) \leq \max\left(1 - h^2, \frac{2}{3\sqrt{3}} h^3\right).$$

1.3 *On se propose désormais de faire varier h pour agir sur la qualité globale de l'interpolation de f par p_2*

a) Au vu du résultat de la question 1.2d), comment a-t-on intérêt à choisir h pour obtenir la meilleure approximation globale possible ?

b) Pour tout h de $]0,1]$, on définit $F(h)$ par: $F(h) = \frac{2}{3\sqrt{3}} h^3 - \left(1 - h^2\right)$.

- Etudier les variations de F sur $]0,1]$.
- En déduire l'existence d'un h_0 unique de $]0,1[$ tel que la fonction G définie sur $]0,1]$ par $G(h) = \max\left(1 - h^2, \frac{2}{3\sqrt{3}} h^3\right)$ soit donnée par:

h	0		h_0		1
$G(h)$		$1 - h^2$		$\frac{2}{3\sqrt{3}} h^3$	

- Comment pourra-t-on déterminer h_0 ?
  N.B: On demande une indication de méthode, mais pas la valeur de h_0.
- Etudier les variations de G sur $]0,1]$ et en déduire la valeur de h qui fournira la meilleure interpolation globale sur l'intervalle $[-1,1]$.

Exercice 2 *Géométrie*

Nb : On change de feuille, svp.

On se place dans le plan affine rappporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.Le but de ce problème est d'obtenir le tracé d'une courbe de Bézier à partir d'éléments géométriques caractéristiques sans faire l'étude calculatoire de la courbe paramétrée. On considère γ la courbe de Bézier cubique de polygone de contrôle $\mathbf{P}=(P_0,P_1,P_2,P_3)$ avec:

$$P_0\,(0,0)\,;\;P_1\,(-2,-1)\,;\;P_2\,(-2,3)\,;\;P_3\,(0,2)\,.$$

2.1 Etablir les équations paramétriques de la courbe γ. *Le but du problème est donc de montrer qu'on peut s'en passer !*

2.2 Soit g l'hodographe de γ, c'est-à-dire que g est la courbe paramétrée qui vérifie: $\gamma'(t)=3\overrightarrow{Og(t)}$. Montrer, à l'aide du cours, que g est une courbe de Bézier admettant pour polygone de contrôle $\mathbf{Q}=(Q_0,Q_1,Q_2)$ avec $Q_0\,(-2,-1)$; $P_1\,(0,4)$; $Q_2\,(2,-1)$.

2.3 Déterminer $g\,(1/2)$ par algorithme de De Casteljau. En déduire que γ admet une tangente verticale pour $t_1=1/2$.

2.4 Pour $t\in[0,1]$, déterminer $g(t)$ en utilisant l'algorithme de De Casteljau; on pourra se contenter de calculer la composante en y de $g(t)$. En déduire que $g(t)$ est de coordonnées $(x(t),0)$ ssi $(E):-10t^2+10t-1=0$.

2.5 Résoudre l'équation (E) et déterminer les paramètres t_0 et t_2 tels que γ admette une tangente horizontale en ces points.

2.6 Esquisser le tracé de g. Existe-t-il un t tel que $\gamma'(t)=\overrightarrow{0}$?

2.7 A partir du polygone $\mathbf{P}$, construire par algorithme de De Casteljau graphique les points $\gamma(t_0)$, $\gamma(t_1)$ et $\gamma(t_2)$ et repérer les tangentes à γ en ces points.

N.B: On prendra $t_0\approx 0,1$ et $t_2\approx 0,9$; on choisira pour unité de longueur 2 *cm*.

2.8 Tracer γ.

2.9 *Généralisation* On considère cette fois la courbe de Bézier Γ de polygone de contrôle $\mathbf{P}=(P_0,P_1,P_2,P_3)$ avec:

$$P_0\,(0,0)\,;\;P_1\,(-2,-1)\,;\;P_2\,(-2,b)\,;\;P_3\,(0,b-1)\,,\text{ avec } b\in\mathbb{R}.$$

a) Déterminer en fonction de b l'équation de degré 2 qui permet de calculer la valeur du paramètre t correspondant aux points de Γ de tangentes horizontales.

b) Discuter et illustrer les différents cas possibles.