Utbm mt44 **Examen médian** **Printemps 2013 (durée 2h)**

Exercice 1

L'objet de l'exercice est d'utiliser l'interpolation polynômiale à des fins de dérivation approchée. L'étude est menée ici dans un cas très particulier, dont plusieurs aspects peuvent être généralisés comme l'a fait Chebyschev avec beaucoup de réussite...

Soit f une fonction polynôme quelconque de degré 3, définie sur un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ avec $a < b$. On considère un réel t quelconque de $]a, b[$.

1.1 *Interpolation sur le support* $\{a, b, t\}$

a) Fournir l'écriture de la fonction polynôme p_2 qui interpole f sur $\{a, b, t\}$, sans expliciter le détail du calcul des différences divisées intervenantes.

b) On considère la fonction erreur d'interpolation e, définie sur $[a, b]$ par:

$$e(x) = f(x) - p_2(x).$$

- Montrer que e est une fonction polynôme de degré 3, dont le coefficient dominant est celui de f, noté pour la suite α.
- Montrer que e s'annule pour $x = a$, $x = b$ et $x = t$.
- En déduire l'écriture de $e(x)$, pour tout x de $[a, b]$.

c) Montrer que la définition de l'erreur d'interpolation permet d'écrire :

$$\forall x \in [a, b] \qquad f'(x) = p_2'(x) + e'(x).$$

d) Déduire de l'expresssion de $e(x)$ obtenue à la fin de la question 1.1b) que:

$$e'(t) = \alpha\,(t - a)\,(t - b)\,.$$

1.2 *Etude d'un cas particulier*

On pose pour cette seule sous-question: $f(x) = x^3$, $a = 0$, $b = 4$ et $t = 1$.

Déterminer pour ces données: p_2, e, e' et $e'(t)$.

1.3 *Utilisation pour la dérivation approchée*

Soit t un réel quelconque de $]a, b[$.

a) Quelle valeur approchée de $f'(t)$ peut-on choisir ? Argumenter brièvement, en utilisant le cours de mt44.

b) On adopte la démarche retenue en 1.3 a) et on s'intéresse à la fonction E définie pour tout t élément de $]a, b[$ par $E(t) = |e'(t)|$, valeur absolue de l'erreur de méthode commise en remplaçant $f'(t)$ par $p_2'(t)$.

- Etudier les variations de E.
- Comment choisir t dans $]a, b[$ pour que $E(t)$ soit minimale ? Ce résultat est-il surprenant intuitivement ?

Exercice 2

Dans ce problème on étudie une courbe de Bézier γ de degré 4 et on s'intéresse aux tangentes de même direction. Dans le plan affine rapporté au repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on considère γ la courbe de Bézier de degré 4 de polygone de contrôle $\mathbf{P}=(P_0, P_1, P_2, P_3, P_4)$ avec

$$P_0\,(0,0)\,,\ P_1\,(-1,0)\,,\ P_2\,(1,1)\,,\ P_3\,(-1,3)\,,\ P_4\,(0,6)$$

.../...

t	0		t_0		t_1		t_2		1
$x(t)$		↘	$-\frac{2}{7}$	↗		↘	$-\frac{2}{7}$	↗	
$y(t)$					↗				

Figure 1:

2.1 Etablir les équations paramétriques de la courbe γ. (N.B : on ne demande pas de faire l'étude de la courbe)

2.2 Donner le polygone de contrôle $\mathbf{Q}$ de l'hodographe de γ. On rappelle que l'hodographe est une courbe de Bézier g telle que, ayant fixé une origine O du repère, on ait pour tout $t \in [0,1]$, $\gamma'(t) = n\overrightarrow{Og(t)}$ avec n degré de la courbe de Bézier considérée.

2.3 A l'aide de l'algorithme de de Casteljau (mis en place par un calcul triangulaire), montrer que $g(1/2) = (0, 3/2)$.

2.4 On admet que $g((1-\sqrt{3/7})/2) = (0, 0.5)$ et que $g((1+\sqrt{3/7})/2) = (0, 2.5)$. Esquisser la courbe g à l'aide du polygone $\mathbf{Q}$ et des indications données.

2.5 Justifier que γ admet trois tangentes verticales en t_0, t_1 et t_2 où t_0, t_1 et t_2 sont des valeurs de paramètre à préciser.

2.6 On fournit le tableau de variations de la figure 1 pour les équations paramétriques de γ.

On donne de plus les valeurs approchées suivantes $y(t_0) \simeq 0.2$ et $y(t_2) \simeq 4$. Après avoir construit graphiquement $\gamma(1/2)$ par l'algorithme de de Casteljau graphique, dessiner la courbe γ dans un repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$; pour une meilleure lisibilité on choisira sur l'axe des abscisses 1 unité=4cm et 1 unité=2cm sur l'axe des ordonnées.

2.7 Déterminer le polygone de contrôle $\widetilde{\mathbf{P}}$ de la courbe $\widetilde{\gamma}$, obtenue en appliquant à γ une rotation d'angle $\pi/2$ et de centre l'origine du repère.

2.8 Dessiner $\widetilde{\gamma}$. Que pouvez-vous dire des vecteurs $\widetilde{\gamma}'(t_0)$, $\widetilde{\gamma}'(t_1)$, $\widetilde{\gamma}'(t_2)$?

2.9 A l'aide de l'étude précédente, expliquer pourquoi il n'existe pas de courbe de Bézier de degré 3 admettant trois tangentes parallèles à une direction donnée.