Printemps 2014

Médian MT44

Le sujet comporte deux exercices. Pensez à changer de copie entre chaque exercice. Tous documents autorisés.

Exercice 1 *Interpolation polynômiale*

On se propose d'approcher une fonction simple sin de différentes façons sur $[-\pi, \pi]$ et d'étudier la qualité des approximations obtenues. La démarche proposée sous la seconde approche est celle suivie par Bézier dans le traitement du problème qui l'a conduit à la mise en évidence des polynômes qui portent son nom aujourd'hui.

1.1 *Première approche*

a) *Etude sur* $[0, \pi]$

Déterminer le polynôme interpolateur p_3 de la fonction sin sur le support $\{0, 0, \pi, \pi\}$.

Nb: On mènera le calcul le plus simplement possible grâce à la construction d'une table de différences divisées généralisée. On rappelle que pour f dérivable en a, on pose $f[a, a] = f'(a)$.

b) *Etude sur* $[-\pi, 0]$

Déterminer le polynôme interpolateur q_3 de la fonction sin sur le support $\{-\pi, -\pi, 0, 0\}$.

c) *Bilan*

- En déduire une fonction p polynôme par morceaux approchant la fonction sin sur $[-\pi, \pi]$.
- La fonction p est-elle de classe C^1 sur $[-\pi, \pi]$? La fonction p est-elle de classe C^2 sur $[-\pi, \pi]$?

d) *Complément*

- Déterminer la valeur de V_p définie par :

$$V_p = \int_{-\pi}^{0} [p"(x)]^2 \, dx + \int_{0}^{+\pi} [p"(x)]^2 \, dx.$$

- Quelle caractéristique géométrique de p mesure V_p ?

1.2 *Deuxième approche*

On cherche une fonction polynômiale de degré trois par morceaux P pour approcher la fonction sin sur $[-\pi, \pi]$ définie comme suit :

$$\begin{aligned} \forall x &\in [-\pi, 0] \quad P(x) = P_0(x) = a_0 + b_0 x + c_0 x^2 + d_0 x^3, \\ \text{et } \forall x &\in [0, \pi] \quad P(x) = P_1(x) = a_1 + b_1 x + c_1 x^2 + d_1 x^3. \end{aligned}$$

On se propose de déterminer les coefficients a_0, b_0, c_0, d_0 et a_1, b_1, c_1, d_1 pour que la fonction P vérifie un certain nombre de propriétés précisées ci-dessous.

a) *"Conditions de bord"*

Fournir les relations (Q_b) pesant sur a_0, b_0, c_0, d_0 et a_1, b_1, c_1, d_1 pour qu'on ait P dérivable sur $\{-\pi, \pi\}$ et :

$$P(-\pi) = \sin(-\pi)\,;\; P'(-\pi) = \sin'(-\pi) \quad \text{et} \quad P(\pi) = \sin(\pi)\,;\; P'(\pi) = \sin'(\pi)\,.$$

b) *Continuité de P en* 0 et coïncidence avec sin en ce point

- Fournir les relations (Q_0) pesant sur a_0, b_0, c_0, d_0 et a_1, b_1, c_1, d_1 pour que P soit continue en 0 et y coïncide avec sin.
  Nb : On produira les relations demandées garantes du fait que :
  $$\lim_{x\to 0^-} P_0(x) = \lim_{x\to 0^+} P_1(x).$$
- En déduire que sous (Q_0), la fonction P est continue sur $[-\pi, \pi]$.

c) Continuité de P' *en* 0

- Fournir les relations (Q_1) pesant sur a_0, b_0, c_0, d_0 et a_1, b_1, c_1, d_1 pour que P' existe et soit continue en 0.
- En déduire que sous (Q_0) et (Q_1), la fonction P' est continue sur $[-\pi, \pi]$.

d) Continuité de P" *en* 0

- Fournir les relations (Q_2) pesant sur a_0, b_0, c_0, d_0 et a_1, b_1, c_1, d_1 pour que P" existe et soit continue en 0.
- En déduire que sous (Q_0), (Q_1) et (Q_2), la fonction P" est continue sur $[-\pi, \pi]$.

e) *Bilan*

Montrer qu'il existe unique une fonction P de la forme voulue, de classe C^2 sur $[-\pi, \pi]$.

Nb : On pourra adopter la démarche suivante :

(1) Déterminer a_0 et a_1. (2) Déterminer c_0, d_0 puis c_1, d_1 en fonction de b_0 et b_1. (3) En déduire un système linéaire dont $\begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \end{pmatrix}$ est solution. (4) Conclure à l'existence et l'unicité de la fonction P cherchée.

Changez de copie

Exercice 2 *Courbes de Bézier*

Dans le repère $(0, \vec{i}, \vec{j})$ orthonormé direct (unité=2cm), on considère γ la courbe de Bezier de degré 3 de polygone de contrôle $\mathbf{P} = (P_0, P_1, P_2, P_3)$ avec

$$P_0(0,0), P_1(2,2), P_2(4,-2), P_3(6,0)$$

2.1 Donner les équations paramétriques de la courbe γ, on notera $x(t)$ et $y(t)$ l'abscisse et l'ordonnée de $\gamma(t)$ et on simplifiera ces expressions.

2.2 Montrer que $y'(t)$ s'annule en 2 valeurs qu'on déterminera.

2.3 Calculer à l'aide de l'algorithme de de Casteljau (sous forme d'un calcul triangulaire) les coordoonnées de $\gamma(0.2)$ et $\gamma(0.8)$.

2.4 Le tableau de variations suivant représente les variations de γ, c'est-à-dire des fonctions $x(t)$ et $y(t)$:

t	0		$\frac{3-\sqrt{3}}{6} \approx 0.2$		$\frac{3+\sqrt{3}}{6} \approx 0.8$		1
$x(t)$				$\nearrow$			
$y(t)$		$\searrow$	$-\frac{3-\sqrt{3}}{6}$	$\nearrow$		$\searrow$	$\frac{3+\sqrt{3}}{6}$

Recopier et compléter ce tableau.

2.5 Tracer la courbe en respectant les consignes suivantes :

- Placer par l'algorithme de de Casteljau graphique le point $\gamma(\frac{1}{2})$ (en laissant apparaître les traits de constructions).
- Faire apparaître les tangentes horizontales.

2.6 *Compléments*:

On considère maintenant le courbe $\tilde{\gamma}$ de degré 4 et de polygone de contrôle $\tilde{\mathbf{P}} = (\tilde{P}_0, \tilde{P}_1, \tilde{P}_2, \tilde{P}_3, \tilde{P}_4)$ avec

$$\tilde{P}_0(0,0), \tilde{P}_1 = (\frac{3}{2}, \frac{3}{2}), \tilde{P}_2(3,0), \tilde{P}_3(\frac{9}{2}, -\frac{3}{2}), \tilde{P}_4 = (6,0)$$

a) Expliquer une démarche simple qui permette de démontrer que $\tilde{\gamma} = \gamma$ (on ne demande pas de faire les calculs explicites mais d'expliquer les étapes à suivre pour montrer un tel résultat).

b) Placer sur le graphique ayant servi à representer γ le polygone de contrôle $\tilde{\mathbf{P}}$. Quel peut être l'intérêt à utiliser le polygone $\tilde{\mathbf{P}}$ au lieu du polygone $\mathbf{P}$ pour représenter γ ?