MEDIAN MT44 Printemps 2015

Tous documents (sauf livres) et calculatrices autorisés. Les résultats intermédiaires non démontrés pourront être utilisés tout au long du devoir. Le barème prendra en compte la longueur du sujet.

UTILISER UNE COPIE PAR EXERCICE

Exercice 1 Erreur et Interpolation

Le but du problème est d'étudier l'erreur d'interpolation d'un point de vue pratique avec la **Partie A** (comparaison des erreurs en interpolation simple et généralisée) et d'un point de vue théorique avec la **Partie B** (démonstration de la formule de l'erreur vue en cours). Les résulats des calculs numériques seront exprimés avec 4 chiffres significatifs.

Partie A On donne les valeurs numériques suivantes pour les fonctions cos et sin.

x	$\cos(x)$	$\sin(x)$
1	0.5403	0.8415
2	-0.4161	0.9093
3	-0.9899	0.1411
4	-0.6536	-0.7568

1. Déterminer le polynôme p_3 d'interpolation de cos pour le support $\{1, 2, 3, 4\}$.

2. Déterminer la table des différences divisées généralisées de la fonction cos pour le support $\{1, 1, 2, 2\}$. En déduire que le polynôme q_3 qui interpole cos sur le support $\{1, 1, 2, 2\}$ s'écrit

$$q_3(x) = 0.5403 - 0.8415(x-1) - 0.1149(x-1)^2 + 0.1620(x-1)^2(x-2) \tag{1}$$

3. On cherche à savoir quel polynôme utiliser pour évaluer cos(1.5).

a. Démontrer (sans calculer cos(1.5)) à l'aide d'une expression du cours que

$$|e_3(1.5)| = |\cos(1.5) - p_3(1.5)| \leqslant 0.0391 \tag{2}$$

b. Calculer $q_3(1.5)$ et déterminer à l'aide de votre calculatrice $|\cos(1.5) - q_3(1.5)|$.

c. Quel polynôme semble le plus adapté pour l'évaluation de cos(1.5) ? Expliquer.

4. Dans cette question on cherche à confirmer le résultat expérimental de la question 3.c.

a. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction réelle et $\{x_0, \ldots, x_n\}$ un support quelconque (non nécessairement distincts) de points de I. On note q_n le polynôme qui interpole f sur le support $\{x_0, \ldots, x_n\}$. En vous inspirant de la démonstration vue en cours pour un support de points distincts, démontrer que

$$e_n(x) = f(x) - q_n(x) = f[x_0, \ldots, x_n, x] \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) \tag{3}$$

est encore vraie pour un support quelconque.

b. On rappelle que pour les différences divisées généralisées, si f est $n+1$ fois dérivable sur I, étant donné un support quelconque $\{x_0, \ldots, x_n\}$ et un $x \in I$ alors il existe ζ_x tel que $f[x_0, \ldots, x_n, x] = \dfrac{f^{(n+1)}(\zeta_x)}{(n+1)!}$. En déduire l'expression de $e_n(x) = f(x) - q_n(x)$ en fonction de $f^{(n+1)}$ et du support dans le cas d'un support quelconque.

c. À l'aide de l'expression de e_n donner (sans évaluer $\cos(1.5)$ à la calculatrice) une majoration de $e_3(1.5) = |\cos(1.5) - q_3(1.5)|$. Est-ce que cela confirme la réponse donnée en 3.c ?

5. Complément : On veut maintenant évaluer $\cos(3.5)$ à une précision ε (avec ε réel strictement positif) sur la base des valeurs numériques données dans l'exercice.

a. Donner un plan d'étude qui permette la réalisation d'une telle approximation (on ne demande pas de faire les calculs mais d'expliquer les étapes de la démarche).

b. Montrer que si $\varepsilon = 10^{-4}$, l'approximation pourra être réalisée par un polynôme de degré $n = 6$.

Partie B : Dans cette partie on se propose de démontrer le résultat suivant vu en cours,

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction $n+1$ fois dérivable sur I et $\{x_0, \ldots, x_n\}$ un support à $n+1$ points distincts. Soit p_n le polynôme qui interpole f sur $\{x_0, \ldots, x_n\}$ alors pour tout $\tilde{x} \in I$ il existe $\zeta_{\tilde{x}}$ tel que

$$e_n(\tilde{x}) = f(\tilde{x}) - p_n(\tilde{x}) = \frac{f^{(n+1)}}{(n+1)!}(\zeta_{\tilde{x}}) \prod_{i=0}^{n} (\tilde{x} - x_i) \tag{4}$$

On se contentera de montrer le cas particulier $n = 1$, la preuve générale reposant sur la même idée.

On rappelle également le résultat suivant, appelé *Théorème de Rolle* qui pourra être utilisé dans cette partie du problème.

Théorème de Rolle : Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ telle que $f(a) = f(b)$ alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable et $\{x_0, x_1\}$ un support de deux points distincts. On note p_1 le polynôme d'interpolation de f sur $\{x_0, x_1\}$. Notons $\tilde{x}$ un élément de I, distinct de x_0 et x_1, en lequel on veut évaluer l'erreur.

Soit $F(x) = f(x) - p_1(x) - A(x - x_0)(x - x_1)$ où A est une constante réelle définie par

$$A = \frac{f(\tilde{x}) - p_1(\tilde{x})}{(\tilde{x} - x_0)(\tilde{x} - x_1)} \tag{5}$$

1. Justifier que F est deux fois dérivable sur I et montrer que $F''(x) = f''(x) - 2A$.

2. Montrer que $F(x_0) = F(x_1) = F(\tilde{x}) = 0$.

3. En déduire qu'il existe c_1 et $c_2 \in I$ tel que $F'(c_1) = F'(c_2) = 0$.

4. En déduire qu'il existe $\zeta \in I$ tel que $F''(\zeta) = 0$.

5. En déduire que quelque soit le choix de $\tilde{x} \in I$ il existe un $\zeta \in I$ tel que $2A = f''(\zeta)$. Conclure.

On change de copie

Exercice 2 Courbes de Bézier cubiques

Partie A : Étude d'une Bézier cubique.

On considère le plan rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et on note $\mathbf{P} = \{P_0, P_1, P_2, P_3\}$ un polygone de contrôle défini. Les coordonnées dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ des points P_i sont les suivantes

$$P_0(0,0), P_1(-2,2), P_2(3,2), P_3(1,0) \tag{6}$$

Pour la représentation graphique on choisira comme unité, $1u = 2cm$.

1. Donner les équations paramétriques de la courbe de Bézier γ définie par le polygone de contrôle $\mathbf{P}$.

2. Montrer que $y'(t) = -12t + 6$ et $x'(t) = -42t^2 + 42t - 6$ en déduire que y' s'annule en $t_1 = \frac{1}{2}$ et x' en $t_0 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{21}}{14}$ et $t_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{21}}{14}$

3. Calculer à l'aide de l'algorithme de de Casteljau les coordonnées de $\gamma(\dfrac{1}{2})$.

4. Recopier et compléter le tableau de variations suivant

t	0		t_0		t_1		t_2		1
$x(t)$		↘		↗		↗		↘	
$y(t)$		↗		↗		↘		↘	

5. Tracer la courbe en respectant les consignes suivantes :
- Placer par l'algorithme de de Casteljau graphique le point $\gamma(\frac{1}{2})$, en laissant apparaître les traits de constructions.
- Faire apparaître les tangentes horizontales et verticales.

Partie B : hodographe

1. Déterminer le polygone de contrôle $\mathbf{Q}$ de l'hodographe g de γ.

2. Esquisser la courbe g (on ne demande pas l'étude précise mais un tracé à partir du polygone de contrôle).

3. Expliquer pourquoi $g(\frac{1}{2})$ appartient à l'axe (Ox).

4. Sans faire de calculs déterminer les valeurs des paramètres t tels que la courbe g coupe l'axe des ordonnées.

5. On translate le polygone $\mathbf{Q}$ par le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$. On obtient ainsi un nouveau polygone de contrôle $\tilde{\mathbf{Q}}$ où toutes les coordonnées sont transformées selon $(x, y) \mapsto (x, y + 3)$. Esquisser une courbe de degré 3, $\tilde{\gamma}$ dont l'hodographe a pour polygone de contrôle $\tilde{\mathbf{Q}}$.

6. Complément : on considère maintenant une translation verticale de $\mathbf{Q}$ par $(x, y) \to (x, y + a)$ et on note $\mathbf{Q_a}$ le polygone modifié. On note γ_a une courbe de Bézier cubique dont l'hodographe a pour polygone de contrôme $\mathbf{Q_a}$. Esquisser plusieurs déformations de γ_a lorsque le paramètre a varie sur l'intervalle $[-3, 3]$.