MEDIAN MT44 Printemps 2017

Tous documents (sauf livres) et calculatrices autorisés. Les résultats intermédiaires non démontrés pourront être utilisés tout au long du devoir. Le barème prendra en compte la longueur du sujet.

UTILISER UNE COPIE PAR EXERCICE

Exercice 1 Interpolation

Le but de l'exercice est de trouver le meilleur support à trois points $\{x_0, x_1, x_2\}$ pour interpoler une fonction $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$. Dans la partie A on compare sur un exemple pratique deux supports pour interpoler la fonction cos. Dans la partie B on prouve pourquoi un des supports considéré dans la partie A produit une meilleure interpolation. Les calculs numériques seront fournis avec 4 chiffres significatifs.

Partie A : On donne les valeurs numériques suivantes pour la fonction cos sur $[-1, 1]$

x	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	0.6479	0.5403

1. Déterminer le polynôme d'interpolation p_3^1 de cos pour le support $\{-1, 0, 1\}$ puis le polynôme p_3^2 d'interplation de cos pour le support $\{-\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}\}$ (on rappelle que $\cos(-x) = \cos(x)$).

2. Sans calculer $\cos(0.4)$, déterminer un majorant de l'erreur $e_3^1(0.4) = |\cos(0.4) - p_3^1(0.4)|$ et de l'erreur $e_3^2(0.4) = |\cos(0.4) - p_3^2(0.4)|$.

3. Quelle interpolation semble être la meilleure ? Confirmer ce résultat en calculant les valeurs (exactes à 4 chiffres significatifs) de $e_3^1(0.4)$ et $e_3^2(0.4)$ en admettant que $\cos(0.4) \approx 0.9211$.

4. À l'aide de vos calculatrices représenter (de manière approchée) les courbes représentatives des fonctions $\psi_1(x) = (x-1)x(x+1)$ et $\psi_2(x) = (x - \frac{\sqrt{3}}{2})x(x + \frac{\sqrt{3}}{2})$. Quel polynôme p_3^1 ou p_3^2 semble le plus performant pour approximer cos sur $[-1, 1]$? Pourquoi ?

Partie B : On prouve maintenant dans cette partie que $\{-\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}\}$ est un support "optimal" pour interpoler une fonction f sur $[-1, 1]$ avec $n+1 = 3$ points d'interpolation.

1. On considère $U(x) = x(x - \frac{\sqrt{3}}{2})(x + \frac{\sqrt{3}}{2})$.

a. À l'aide de la calculatrice représenter $y = U(x)$ pour $x \in [-1, 1]$. En déduire que $\sup_{[-1,1]} |U(x)| = \frac{1}{4}$ (où sup est la borne supérieure de la fonction).

b. Déterminer les valeurs $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ et α_3 telles que $|U(\alpha_i)| = \dfrac{1}{4}$.

2. Soit Q un polynôme de degrée 3 de coefficient dominant 1, i.e. $Q(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$. On suppose que $sup_{[-1,1]}|Q(x)| \leqslant \dfrac{1}{4}$.

a. Soit P défini par $P = Q - U$. Quel est le degré de P ?

b. Montrer que $P(\alpha_0) \geqslant 0$, $P(\alpha_1) \leqslant 0$, $P(\alpha_2) \geqslant 0$ et $P(\alpha_3) \leqslant 0$. Que pouvez-vous en déduire sur le nombre de racines de P ?

c. Conclure que $Q = U$.

3. Conclusion : pour interpoler $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$, expliquer pourquoi le meilleur choix de support qui minimise la fonction erreur $|e(x)| = |\dfrac{f^{(3)}(\zeta)}{3!}||(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)|$ est le support $\{-\dfrac{\sqrt{3}}{2}, 0, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\}$.

On change de copie

Exercice 2 Courbes de Bézier quartique

Le but de ce problème est d'obtenir le tableau de variations et le tracé d'une Bézier γ de degré 4 sans en faire l'étude complète mais en utilisant les informations obtenues sur l'hodographe de γ qui sera notée g.

Partie A : Étude d'une Bézier cubique.

On considère le plan rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et on note g la courbe de Bézier définie par le polygone de contrôle $\mathbf{Q} = (Q_0, Q_1, Q_2, Q_3)$. Les coordonnées dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ des points Q_i sont les suivantes

$$Q_0(-1,-1), Q_1(-2,2), Q_2(2,2), Q_3(1,-1). \tag{1}$$

Pour la représentation graphique on choisira comme unité, $1u = 2cm$.

1. Donner les équations paramétriques de la courbe de Bézier g définie par le polygone de contrôle $\mathbf{Q}$.

2. Montrer que $y'(t) = -18t + 9$ et $x'(t) = -30t^2 + 30t - 3$. En déduire que y' s'annule en $t_1 = \frac{1}{2}$ et que x' s'annule en deux racines notées t_0 et t_3 que vous calculerez.

3. Calculer les coordonnées de $g(1/2)$ en utilisant l'algorithme de de Casteljau.

4. Recopier et compléter le tableau de variations suivant

t	0		t_0		t_1		t_2		1
$x(t)$		$\searrow$			$\nearrow$			$\searrow$	
$y(t)$			$\nearrow$				$\searrow$		

5. Tracer précisemment la courbe g en utilisant les questions précédentes.

6. Déterminer les valeurs de t pour lesquelles la courbe g coupe l'axe des abscisses.

Partie B : Variations et tracé d'une Bézier quartique

Dans cette partie on cherche à déterminer le tableau de variation et à tracer γ la courbe de polygone de contrôle $\mathbf{P} = (P_0, P_1, P_2, P_3, P_4)$ dont l'hodographe est la courbe g étudiée dans la **Partie A**.

1. Déterminer le polygone de contrôle $\mathbf{P}$ de γ.

2. Construire le tableau de variations de γ à partir des informations obtenues dans la Partie **A**. Vous expliquerez en particulier comment vous déterminez le signe de x'_γ et y'_γ, les fonctions dérivées des coordonnées de γ, à partir du tracé de g.

3. À l'aide de l'algorithme de de Casteljau graphique, placer le point où γ possède une tangente verticale.

4. Tracer à partir de la donnée du polygone de contrôle et des informations obtenues aux questions **2** et **3**, la courbe γ (on placera de manière approximative les tangentes horizontales sans chercher à calculer leurs positions exactes).

Partie C : Symétrie

On souhaite tracer maintenant le courbe $\tilde{\gamma}$ symétrique de γ par rapport à l'axe des abscisses.

1. Donner le polygone de contrôle de $\tilde{\gamma}$.

2. Comment peut-on déduire le polygone de contrôle de l'hodographe de $\tilde{\gamma}$ à partir de celui de g ?