**Utbm mt45, xt45** **Examen final** **Automne 2011**

**NB: Les exercices seront absolument rédigés sur des feuille séparées.**
**Nous rappelons que toute réponse non justifiée sera ignorée et que, seules les explications claires et précises seront prises en compte lors de la correction.**

## Exercice 1 *Développements limités*

**NB : On change de feuille !**

Soit $f$ la fonction numérique définie sur $]-\pi/2, \pi/2[$ par: $f(x) = 2\tan(x) - x$.

**1.1** Fournir le développement limité de $f$ à l'ordre 6 au voisinage de $x_0 = 0$.

**1.2** On admet que $f$ admet une fonction réciproque $f^{-1}$ définie sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $]-\pi/2, \pi/2[$ et que $f^{-1}$ admet un développement limité à l'ordre 6 au voisinage de $y_0 = 0$, de la forme:

$$f^{-1}(y) = ay + by^3 + cy^5 + o\left(y^6\right), \text{ avec } (a, b, c) \in \mathbb{R}^3.$$

En utilisant le fait que $f^{-1} \circ f(x) = x$, déterminer les réels $a, b, c$.

**1.3** En déduire une équation de la tangente $(T_0)$ à la courbe $(C)$ représentative de $f^{-1}$ au point $M_0$ de coordonnées $\left(y_0, f^{-1}(y_0)\right)$. Préciser de surcroît les positions locales respectives de $(T_0)$ et de $(C)$.

NB: Cette sous-question peut être traitée sans connaître les valeurs explicites des réels $a, b, c$.

## Exercice 2 *Recherche de primitive d'une fraction rationnelle*

**NB : On change de feuille !**

Soit $g$ la fonction numérique de la variable réelle définie par:

$$g(x) = \frac{x^3}{x^2 - x - 6}.$$

**2.1** Déterminer le domaine de définition $D_g$ de la fonction $g$.

**2.2** Montrer qu'il existe des réels $A$, $B$, $C$ et $D$, à déterminer, tels que pour tout $x$ de $D_g$ on ait:

$$g(x) = Ax + B + \frac{Cx + D}{x^2 - x - 6}.$$

**2.3** Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $r(x)$ suivante:

$$r(x) = \frac{Cx + D}{x^2 - x - 6}.$$

**2.4** En déduire une primitive $G$ de $g$ sur $D_g$.

.../...

## Exercice 3 *Réduction d'endomorphisme*

**NB : On change de feuille !**

Soit $a \in \mathbb{R}$ fixé. On donne la matrice $U$ de $M_3(\mathbb{R})$ par:

$$U = \begin{pmatrix} -1 & a^2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3-2a & 2 \end{pmatrix},$$

considérée comme la matrice d'un endomorphisme $u$ de $\mathbb{R}^3$ rapporté à la base canonique $B$.

**3.1** *Polynôme caractéristique de $u$*

**a)** Calculer le polynôme caractéristique de $u$. Vérifier qu'il ne dépend pas de $a$.

**b)** En déduire les valeurs propres de $u$ et préciser leur multiplicité.

**3.2** *On suppose dans cette question que $a = 1$.*

**a)** *Etude des espaces propres.*

**a1)** Déterminer les espaces propres de $u$.

**a2)** Déterminer une base propre $B'$ de $u$.

**a3)** La matrice $U$ est-elle diagonalisable ? Justifier.

**b)** *Conséquences*

**b1)** Comment s'écrit la matrice $U'$ de l'endomorphisme $u$ dans la base $B'$ ?

**b2)** Fournir la matrice de passage de $B$ à $B'$, notée $P$.

**3.3** *On suppose dans cette question que $a = 0$.*

**a)** Déterminer les espaces propres de $u$.

**b)** Montrer que dans ce cas la matrice $U$ n'est pas diagonalisable. Justifier.

**3.4** *On suppose maintenant que $a$ est un réel quelconque*

Pour quelles valeurs de $a$, la matrice $U$ est elle diagonalisable ? Justifier.