Utbm mt45, xt45 **Examen final: durée 2 heures** **Automne 2012**

Nb : On rédigera absolument les exercices sur des copies séparées.
Il est rappelé que les résultats sans preuves, même justes, seront considérés inexistants.

Exercice 1 *Développements limités*

Nb : On change de feuille, svp.

On considère la fonction f définie par:

$$f(x) = \frac{\ln(1+x)}{e^x}.$$

1.1 Fournir le domaine de définition D_f de f.

Notations

On notera (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé du plan; pour tout point M_0 d'abscisse x_0 de D_f on notera T_{M_0} la tangente à (C) en M_0.

1.2 *Etude locale au voisinage de* $x_0 = 0$

a) Fournir le développement limité à l'ordre 2 de f au voisinage de $x_0 = 0$.

b) En déduire l'allure locale de la courbe (C) et de sa tangente T_{M_0} au voisinage du point M_0 considéré.

1.3 *Etude locale au voisinage de* $x_1 = 3$

a) Fournir le développement limité à l'ordre 2 de f au voisinage de $x_1 = 3$.

b) En déduire l'allure locale de la courbe (C) et de sa tangente T_{M_1} au voisinage du point M_1 considéré.

1.4 *Applications numériques*

Utiliser les développements limités antérieurs pour fournir des valeurs approchées de $f(2,999925)$ et de $f(0,00001)$.

Exercice 2 *Intégration*

Nb : On change de feuille, svp.

2.1 On considère la fonction f définie par:

$$f(t) = \frac{1}{(t-1)^2\,(t+1)^2\,(t^2+1)}.$$

a) Déterminer le domaine de définition D_f de f et montrer que f est paire sur ce domaine, c'est-à-dire que:

$$\forall t \in D_f \quad -t \in D_f \text{ et } f(-t) = f(t).$$

b) Fournir, en décrivant de façon sobre et précise l'enchaînement des réductions successives, l'écriture en éléments simples de $f(t)$ sans préciser numériquement la valeur des constantes intervenantes.

c) Sans préciser la valeur des constantes issues de b), en déduire une primitive de f sur D_f.

... / ...

2.2 Pour un réel X on définit la fonction F par: $F(X) = \int_2^X f(t)dt$.

a) Justifier que F est définie pour tout X de $[2, +\infty[$.

b) Montrer que F est croissante sur $[2, +\infty[$.

c) L'intégrale $\int_2^{+\infty} f(t)dt$ est-elle convergente ?

d) En déduire le tableau des variations de F sur $[2, +\infty[$.

Exercice 3 *Réduction d'endomorphismes de $\mathbb{R}^2$*

Nb : On change de feuille, svp.

Soit a un paramètre réel fixé. On donne l'élément U_a de $M_2(\mathbb{R})$ par

$$U_a = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a & a+1 \end{pmatrix},$$

considéré comme la matrice d'un endomorphisme u_a de $\mathbb{R}^2$ rapporté à la base canonique $B = (e_1, e_2)$.

3.1 Déduire de la matrice U_a la valeur des couples de $\mathbb{R}^2$ $u_a(e_1)$ et $u_a(e_2)$.

3.2 *Polynôme caractéristique.*

a) Montrer que l'expression du polynôme caractéristique $P(\lambda)$ de U_a est:

$$P(\lambda) = \lambda^2 - \lambda(a+1) + a.$$

b) Montrer que $\lambda = a$ est valeur propre pour u_a. En déduire l'ensemble des valeurs propres de u_a.

3.3 *Etude des espaces propres*

Pour réaliser cette étude de façon complète, on distingue deux cas.

a) *Premier cas: on suppose que $a = 1$*

a1) Déterminer les espaces propres de u_1.

a2) La matrice U_1 est-elle diagonalisable ?

a3) Etait-il possible que U_1 vérifie la propriété contraire ?

b) *Deuxième cas: on suppose que $a \neq 1$*

b1) Déterminer les espaces propres de u_a.

b2) Déterminer une base propre B' de u_a.

b3) Comment s'écrit la matrice U'_a de l'endomorphisme u_a dans la base B' ?

b4) Fournir la matrice de passage de B à B', notée P.

b5) Calculer $(U_a)^n$, pour tout entier naturel n, en fonction de n, P et a.

N.B: On pourra supposer cette expression connue, même si elle n'a pas été calculée explicitement, pour l'utiliser ultérieurement.

3.4 *Application pour $a \neq 1$*

On définit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par la donnée de deux réels v_0 et v_1 et de la relation de récurrence suivante:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_{n+2} = (1+a)v_{n+1} - a\,v_n$$

et on note V_n la matrice définie par $V_n = \begin{pmatrix} v_n \\ v_{n+1} \end{pmatrix}$.

a) Exprimer V_{n+1} en fonction de V_n et de U_a, puis V_n en fonction de n, V_0 et de U_a et enfin V_n en fonction de n, V_0 et a seulement.

b) Quel est l'intérêt algorithmique de la dernière écriture obtenue ?