Utbm xtmt45 **Examen final** **Automne 2013 (durée 2h)**

N.B: Les deux exercices seront absolument rédigés sur des feuilles séparées.

Exercice 1 *Intégration*

N.B: On change de feuille.

On considère un réel positif M et on pose pour tout entier n élément de $\mathbb{N}$:

$$I_n(M) = \int_0^M x^n e^{-x} dx.$$

1.1 Montrer que, pour tout M et tout n élément de $\mathbb{N}$, l'intégrale $I_n(M)$ existe et qu'elle est positive.

1.2 *Etude générale de* $I_n(M)$

a) Calculer $I_0(M)$.

b) Etablir une relation de récurrence liant $I_{n+1}(M)$ et $I_n(M)$ pour tout n élément de $\mathbb{N}$.

N.B: On utilisera une intégration par parties.

1.3 *Etude du cas particulier* $M = 1$

On pose pour cette seule sous-question, $M = 1$ et on définit la suite (u_n) par $u_n = I_n(1)$ pour tout n élément de $\mathbb{N}$.

a) Calculer u_0.

b) Fournir la relation de récurrence liant u_{n+1} et u_n pour tout n élément de $\mathbb{N}$. Calculer u_1 et u_2.

c) La suite (u_n) est-elle convergente ?

N.B: On pourra étudier la monotonie de (u_n).

1.4 *Etude de* $\lim\limits_{M\to+\infty} I_n(M)$

On définit la suite (v_n) par $v_n = \lim\limits_{M\to+\infty} I_n(M)$ pour tout n élément de $\mathbb{N}$.

a) Montrer que v_0 est défini.

b) Montrer que pour tout entier naturel n, le terme v_n est défini.

c) Fournir l'écriture explicite de v_n et étudier la convergence de (v_n).

Exercice 2 *Algèbre linéaire*

N.B: On change de feuille.

Soit $A = \begin{pmatrix} -2/5 & 3/10 \\ 3/10 & 2/5 \end{pmatrix}$ la matrice de $M_2(\mathbb{R})$ représentant un endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$ relativement à la base canonique B=(e_1, e_2).

2.1 *Résultat technique*

Soit P une matrice de $M_2(\mathbb{R})$ de la forme $P = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.

a) Montrer que $({}^tP)\,P = \alpha I_2$ où α est un réel que l'on précisera, sachant que ${}^tP$ désigne la transposée de P et I_2 la matrice identité de $M_2(\mathbb{R})$.

b) En déduire que si $\alpha \neq 0$, P est inversible; fournir alors P^{-1} en fonction de α et ${}^tP$.

c) Conclure que si $P = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ n'est pas la matrice nulle, alors elle est inversible.

.../...

2.2 *Diagonalisation de la matrice A*

a) Ecrire le polynôme caractéristique de A.

b) Calculer les valeurs propres λ_1 et λ_2 de A; en déduire que A est diagonalisable.

c) Déterminer les espaces propres V_{λ_1} et V_{λ_2} respectivement associés à λ_1 et λ_2.

d) *Choix d'une base propre*

- Vérifier que si (a, b) est un vecteur propre de V_{λ_1}, alors $(-b, a)$ est un vecteur propre de V_{λ_2}.
- En déduire une base de vecteurs propres e'_1, e'_2 de formes respectives (a, b) et $(-b, a)$, que l'on notera $B'=(e'_1, e'_2)$.

e) Soit P la matrice de passage de la base B à la base B'. Donner l'expression de P et P^{-1}.

N.B: On pourra s'aider des résultats de la question 2.1.

f) Sans calculs, donner l'expression de $D = P^{-1}AP$.

2.3 *Applications*

On considère une suite de vecteurs $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}^2$ définie par:

$$v_0 \in \mathbb{R}^2 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N} \quad v_{n+1} = f(v_n)$$

et on se propose d'étudier $\lim\limits_{n\to+\infty} (v_n)$.

a) *Approche par le calcul*

a1) Montrer que si $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ représente les composantes de v_n dans la base canonique B, ces composantes sont définies par deux suites numériques (x_n) et (y_n) vérifiant:

$$x_0 \in \mathbb{R},\ y_0 \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \begin{cases} x_{n+1} = -\frac{2}{5}x_n + \frac{3}{10}y_n \\ y_{n+1} = \frac{3}{10}x_n + \frac{2}{5}y_n \end{cases}.$$

a2) Exprimer une relation entre $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$, A^n et $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$.

a3) Après avoir calculé D^n, en déduire l'écriture explicite des termes x_n et y_n.

a4) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} (v_n)$.

b) *Approche par la géométrie*

b1) Représenter dans l'espace des vecteurs du plan, la base des vecteurs propres déterminée à la question 2.2d).

b2) A l'aide d'un dessin clair, expliquer comment un vecteur décomposé dans cette base B' est transformé par f.

b3) Quelles transformations géométriques simples permettent de décrire f dans la base B' ?

b4) Que pouvez-vous en déduire sur la norme d'un vecteur transformé par f ?

b5) Sans calcul, qu'en déduisez-vous sur $\lim\limits_{n\to+\infty} (v_n)$?